Л.М.ФРИДМАН

УЧИТЕСЬ УЧИТЬСЯ МАТЕМАТИКЕ

Л.М.ФРИДМАН

УЧИТЕСЬ УЧИТЬСЯ МАТЕМАТИКЕ

КНИГА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1985

ББК 22.1
Ф88

Рецензенты: методист Московского городского института усовершенствования учителей *В. И. Жохов*,
зам. директора школы № 899 г. Москвы по учебно-воспитательной работе *Л. Н. Рязанова*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Фридман Л. М.
Ф88 Учитесь учиться математике: Кн. для учащихся.— М: Просвещение, 1985.—112 с., ил.

Пособие для учащихся VI—VIII классов, направленное на отработку умений и навыков учебного труда. Знакомит с рациональными способами и приемами обучения математике.

Ф $\frac{4306020000-539}{103(03)-85}$ 135—85

ББК 22.1
51

ПРЕДИСЛОВИЕ

Надежда Константиновна Крупская считала, что «... наших ребят мы должны сразу же вооружить необходимыми им для строительства новой жизни организационными навыками, застраховать их от ненужной растраты сил. Мы должны помочь им как можно раньше научиться организовывать целесообразно свою жизнь и труд»[1].

Главный труд наших ребят — это учение, и поэтому очень важно научить их разумно учиться. Между тем зачастую школьники учатся этому чисто стихийно, неуправляемо, лишь подражая взрослым или своим сверстникам, заимствуя не всегда рациональные способы и приемы учения, а иногда примитивные и даже вредные (вроде зубрежки), что приводит в конечном итоге к неуспеваемости, калечит умственные способности.

Сейчас уже всеми, наверное, осознана необходимость и значимость овладения учащимися умениями и навыками учебного труда. Во многих школах ведется большая работа в этом направлении. На практике осуществляется призыв Н. К. Крупской: «Надо пропитать всю школьную жизнь, которая становится все многограннее, принципами научной организации труда»[2]. Но эта деятельность сдерживается, в частности, недостатком литературы по формированию у школьников учебных умений.

В особо трудном положении находится в настоящее время школьная математика. Общепризнанно, что она является наиболее трудоемким учебным предметом, требующим от учащихся повседневной, кропотливой и значительной по объему самостоятельной работы, причем весьма специфичной и разнообразной. Программа же не отводит специального времени для овладения методами и приемами учебной работы. Поэтому возникла необходимость в специальном пособии для учащихся по формированию и развитию навыков изучения математики.

Пособие это необходимо еще и потому, что очень важно широко пропагандировать рациональные методы изучения математики, элементы культуры учения и мышления. Особое значение оно должно иметь для решения такой важнейшей задачи, как распространение непрерывного образования. XXVI съезд КПСС указывал на необходимость прививать учащимся умения самостоятельно пополнять свои знания, ориентироваться в стремительном потоке научной и политической информации. Поэтому это пособие, как нам представляется, будет полезно не только ученикам общеобразовательных школ, ПТУ, техникумов, но и многим взрослым.

Книга построена так, что читатель последовательно получает ответы на следующие вопросы: зачем изучать математику? что изучать в ней? как изучать? как научиться рационально изучать? Пособие содержит большое число различных заданий для самостоятельной работы учащихся, направленных на выработку умений и навыков учебного труда, на развитие способностей школьников к обучению. Хотя на большинство заданий в самом пособии имеются указания и ответы, но, естественно, что в ряде случаев ученики будут нуждаться в консультации и помощи учителей.

В написании данного пособия большую помощь оказали Татьяна Александровна Пушкина и Илья Яковлевич Каплунович, с которыми подробно обсуждался план пособия и которые представили автору ряд материалов для первой части пособия. Рукопись пособия внимательно прочитали В. И. Жохов, В. Н. Руденко, Л. Н. Рязанова и Б. С. Эппель, замечания и пожелания которых во многом помогли усовершенствовать рукопись.

Всем им выражаю благодарность.

Пособие подобного типа по математике, насколько нам известно, создается впервые, и поэтому оно, естественно, не лишено недостатков и упущений. Буду очень признателен за отзывы и предложения по улучшению пособия, которые следует направлять в издательство «Просвещение», редакцию математики (129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41).

Автор

[1] Крупская Н. К. Педагогические сочинения в десяти томах. М., 1959, т. 5, с. 106.

[2] Там же, с. 107.

ВВЕДЕНИЕ

Дорогие ребята!

Должно быть, многие из вас не раз приходили в отчаяние на многолетнем пути обучения по математике: то никак не поймешь доказательство теоремы, вывод формулы, то задача никак не «решается», то еще какая-либо трудность.

Действительно, учиться математике нелегко. Русский писатель прошлого века Д. И. Писарев (1840—1868) даже утверждал, что «математика всегда... остается для учеников трудной работой». Несомненно, математика требует большого труда, ибо ее нельзя изучить, только наблюдая за тем, как это делают другие. Надо самому много и ежедневно работать над изучением математики, и только тогда она принесет и пользу и большую радость, радость от преодоления трудностей, радость познания. Известный педагог В. А. Сухомлинский (1918—1970) по этому поводу писал: «Ребенок, никогда не познавший радости труда в учении, не переживший гордости от того, что трудности преодолены,— это несчастный человек».

Так давайте будем счастливыми, будем переживать радость в учении, гордость за свои успехи!

Что для этого надо? **Надо научиться учиться математике!**

Все трудности, связанные с усвоением математики, происходят главным образом оттого, что многие из вас не умеют рационально учиться, разумно организовать свою работу. Для того чтобы учиться весело, легко и с наибольшей пользой для себя, надо овладеть техникой учения. Великий преобразователь природы И. В. Мичурин (1855—1935) писал: «Кто не владеет техникой какого-нибудь искусства, науки или ремесла, тот никогда не будет способен создать что-нибудь выдающееся».

От чего же зависит успешность овладения этой техникой?

Весьма часто малые успехи в изучении математики пытаются объяснить отсутствием способности к математике. Вот, например, какой разговор произошел между учительницей математики Марией Львовной и учащимся Сергеем после урока, на котором писали контрольную работу.

— Опять неудача? — сочувственно спросила М. Л.

— А! — махнул рукой Сергей.

— Что, формулу какую-нибудь забыл? — поинтересовалась М. Л.

— Если бы! Пример не сделал.

— Почему?

— Не догадался, как доказать тождество.

— А почему не догадался? — допытывалась М. Л.

— Ну, не сообразил,— тяжело вздохнул Сергей.

— Что значит не сообразил? Почему не сообразил?

— Ну, не сообразил, не додумался. А почему?.. Потому что плохо проанализировал тождество.

— А что надо сделать, чтобы правильно проанализировать?

Сергей осторожно и внимательно посмотрел на учительницу: не смеется ли она над ним. Но Мария Львовна была абсолютно серьезна.

— Почему ты как удивленно смотришь на меня? Ведь если я тебя спрошу, что надо сделать для отыскания неисправности в электроплитке, то ты мне, вероятно, опишешь все свои действия.

— Так то в плитке. Там понятно: или контакты где-то нарушены и надо их проверить, или провод переломан внутри, или спираль перегорела. Значит, нужно проверить вилку, контакт шнура со спиралью, посмотреть, цела ли сама спираль, и, наконец, узнать, нет ли обрыва в проводе.

— Совершенно верно. Вот ты проанализировал причины неисправности электроплитки и перечислил, какие действия надо осуществлять. А какие действия надо выполнить при анализе и доказательстве тождества?

— Так тут куда труднее. Тут математика, тут думать надо,— мрачно ответил Сергей.

— А разве в случае с плиткой ты не думал?

— Думал, конечно. Но здесь все понятно — плитка. А к математике у меня нет абсолютно никаких способностей.

— Так не бывает. Способности, в том числе и математические, есть у каждого человека. Они неодинаковые, конечно: у одних — лучше, у других — хуже. Но все зависит от хозяина этих способностей: как он ими распоряжается, как он их развивает.

— Сомневаюсь. Вот у моей сестрички, безусловно, талант к математике. Она эти задачи, как говорится, «щелкает, как орешки». А я даже не знаю, как к задаче подойти.

— Так, выходит, что родители тебя обидели? Сестренке они передали «математические гены», а тебе нет? Смешно! И потом, чтобы рассуждать, есть ли у тебя способности к математике, технике, учебе, труду и т. д., надо знать, что такое способности, из чего они складываются...

— Ну, этого никто не знает,— сказал Сергей.

— Почему же никто не знает? Знает. Есть специальная наука — психология, которая как раз и изучает, что такое способности и как их развивать. Кому и что надо делать, чтобы сформировать у себя те или иные способности? Что значит анализировать, думать? Как этому научиться? И вообще что значит учиться? И как научиться?

— Но ведь все говорят, что математические способности проявляются очень рано. Учительница Надежда Петровна рассказывала, что великий немецкий математик Гаусс заявил, будто считать он научился раньше, чем говорить. Это я понимаю: способный!

— Если ты хочешь примеры, то пожалуйста. Известного изобретателя Эдисона выгнали из школы как абсолютно неспособного ученика. Или вот, когда у отца Карла Линнея — впоследствии выдающегося биолога — спрашивали, кем будет его сын, то он печально констатировал, что способностей у его сына хватит лишь на то, чтобы научиться шить сапоги. У великого химика Менделеева частенько в школе случались большие нелады с химией. А наш знаменитый математик Лузин не мог в школе одолеть математику без репетитора... Достаточно? Или еще приводить примеры?

— Ну, это случайности. Просто у этих людей способности были, но не сразу проявились,— пытался настаивать на своем Сергей.

— Нет, дело не в случайности. Конечно, не всякий человек может стать ученым-математиком. Но ведь мы с тобой говорим не об этом, а об изучении математики: способен ли каждый изучить школьный курс математики? А на этот вопрос психология дает вполне определенный ответ: да, *каждый ученик вполне способен овладеть школьным курсом математики,* и если у некоторых учащихся, вроде тебя, способности к изучению математики пока еще недостаточно развиты, то это не значит, что их нельзя развить. Вот твоя сестренка, как ты говоришь, легко решает задачки. А ты думал — почему это так? Почему у нее все задачки легко решаются? Присмотрись к ней, и ты увидишь, что она любит решать задачи, что она внимательно их изучает, что она овладела секретами учения, секретами решения задач. Вот и тебе надо овладеть этими секретами, тогда ты полюбишь решать задачи и обнаружишь, что у тебя достаточно способностей для их решения.

На этом закончился разговор Марии Львовны с учеником.

Вот для того чтобы помочь ученикам, подобным Сергею, и написана эта книга. Она предназначена для тех, кто хочет быть настоящим человеком, для тех, кто стремится овладеть знаниями по математике и рациональной техникой ее изучения. В ней подробно показано: как работать в классе на уроках математики и как работать дома над выполнением домашних заданий, учить определения, правила, формулы и теоремы и как доказывать теоремы и решать задачи.

Для того чтобы наиболее успешно учиться математике, надо иметь хорошую память, устойчивое внимание, развитое воображение, логическое мышление, сообразительность и ряд других качеств, надо иметь достаточные способности для учения. Но все эти качества и способности вы можете и должны развивать у себя. В книге вы найдете указания, как это сделать, как тренировать себя, чтобы развить свою память, внимание, сообразительность и т. д. Помните призыв Карла Маркса: **«Призвание, назначение, задача всякого человека — всесторонне развивать свои способности!»**

Эта книга предназначена не только для тех школьников, которые хотят, но почему-то не могут подружиться с математикой — царицей всех наук. Она будет полезна и тем школьникам, которые любят эту увлекательную науку, легко и с удовольствием решают математические задачи. Они смогут узнать, правильно ли они усваивают математические понятия, проверить себя, усвоили ли они глубоко то или иное понятие, ту или иную теорему и т. д.

В первом разделе книги вы узнаете, зачем надо учиться математике, каждому ли современному человеку она необходима и почему, что значит знать и изучать эту науку. Здесь будет рассказано не только о прикладных и практических возможностях математики, но и ее роли в психологическом развитии человека: в развитии его мышления, пространственного воображения, памяти, внимания, воли и т. д. Математика — это и могучий инструмент познания окружающего мира, и, как утверждал Михаил Иванович Калинин (1875—1946) — выдающийся советский государственный и партийный деятель, очень полезная и нужная «гимнастика ума». Позже он вспоминал: «В период своей юности я любил заниматься и математикой. Каждый вечер, как ложиться спать, я решал одну-две задачи по геометрии, алгебре или арифметике».

Во втором разделе книги рассмотрены основные объекты, с которыми вы встречались в процессе изучения математики (понятия, их определения, классификация; математические предложения, их виды и т. д.). Вы, тем самым, узнаете, чему надо учиться в математике, какими действиями надо овладеть.

Третий раздел посвящен самому сложному вопросу: как изучать математику в зависимости от того, где и когда это изучение происходит (в классе или дома, по учебнику или при объяснении учителя, самостоятельно или коллективно и т. д.). Здесь анализируются формы работы с математическим материалом, указывается, в чем должна состоять самостоятельная работа над этим материалом.

Наконец, последний раздел книги поможет вам установить, какими качествами к обучению математики вы уже обладаете, а какими еще нет, и, исходя из этого, определить, что именно необходимо развивать у себя в первую очередь. Не менее важен и интересен для каждого из вас вопрос о потенциальных возможностях, т. е. о том, на что вы будете способны, если достаточно потренируетесь. Это можно будет в некоторой степени определить, прорешав задачи из данного раздела.

Книга снабжена указаниями, ответами, а в некоторых случаях и полными решениями для большинства заданий и задач, помещенных во всех разделах книги. О том, как ими пользоваться, мы поговорим в свое время.

Эта книга — не для обычного чтения. С ней надо работать, имея бумагу и карандаши, притом не спеша, а внимательно вчитываясь и аккуратно выполняя все задания. Только тогда она принесет вам пользу. Если же при чтении или выполнении заданий вы встретите такие затруднения, которые самостоятельно не сумеете преодолеть, то обратитесь за консультацией к учителю.

Всем вам необходимо помнить, что наша Коммунистическая партия нацеливает на то, чтобы прививать школьнику привычку и любовь к полезному труду. Это может быть труд физический или умственный, но обязательно настоящий труд — производительный, нужный обществу.

В конце книги помещен краткий словарь основных терминов. Так что если вы встретите при чтении книги какой-либо термин, вам недостаточно понятный, то загляните в словарь.

Желаю вам успехов в овладении техникой учебного труда, в развитии своих способностей! Желаю вам успехов и радости в изучении математики!

Автор

ЗАЧЕМ НАДО ИЗУЧАТЬ И ЗНАТЬ МАТЕМАТИКУ

Сергея — ученика VII класса — одолевали сомнения: а для чего нужно так много учиться математике? Зачем ему нужно знать формулы, теоремы? Ведь он не собирается быть математиком, так зачем ему ее изучать в таком большом объеме?

Однажды он остался в кабинете после уроков, ожидая Нину, одну из лучших учениц класса и его соседку по дому. Нина перебирала в шкафах модели, плакаты и книги, протирала их и укладывала на свои места. Мария Львовна, учительница, тоже сидела в кабинете и проверяла контрольные работы.

Сергей поделился с Ниной своими сомнениями. Нина, выслушав вопросы Сергея, порылась среди книг в шкафу, нашла нужную ей.

— Вот слушай, что пишет знаменитый Галилей (1564—1642): «Если бы мне пришлось начать вновь свое обучение, то я последовал бы совету Платона и принялся бы сперва за математику как науку, требующую точности и принимающую за верное только то, что вытекает как следствие из доказанного».

— Ну, то Галилей — великий ученый. А я не собираюсь быть ученым.

— А человеком культурным и образованным ты собираешься быть? — разгорячилась Нина.

— Ну, Нина, зачем же ты так ставишь вопрос. Конечно, я хочу быть образованным человеком, но причем здесь математика?

— Да притом, что нельзя быть образованным человеком, не зная математики. С древнейших времен каждый образованный человек изучал и обязательно знал математику. Многие известные всему миру ученые-философы были одновременно не менее известными математиками: Демокрит, Аристотель, Улугбек, Навои, Декарт, Лейбниц. Немецкий философ Кант занимал должность профессора математики университета. Карл Маркс специально изучал математику, и не только изучал, но и сделал большую работу по математике. Его математические рукописи до сих пор интересуют специалистов. Фридрих Энгельс в своих книгах весьма часто рассматривал различные математические вопросы и использовал примеры из математики для доказательства своих идей. Он же дал такое четкое определение математической науке, которое до сих пор считается наилучшим. Послушай, вот что он писал: «Для диалектического и вместе с тем материалистического понимания природы необходимо знакомство с математикой и естествознанием».

— А Владимир Ильич Ленин — вождь нашего народа,— продолжала Нина,— интерес к математике, который ему привил с детства его отец Илья Николаевич, сохранил на всю жизнь. Глубокое знание математики позволило Владимиру Ильичу всесторонне обосновать возможности применения математических методов в познании природы и общества, успешно вести дискуссию с такими крупными математиками той эпохи, как Пуанкаре и другими.

— Все это, конечно, так,— согласился Сергей,— только ведь ты все говоришь о великих людях. А зачем мне, не великому, надо знать всю математику, мне ведь достаточно научиться считать, вычислять, чему нас научили в начальной школе и в IV—V классах.

Тут вмешалась Мария Львовна, которая уже давно прислушивалась к спору Сергея и Нины.

— Во-первых, Сергей, ты в школе изучаешь не всю математику, как ты сказал, а лишь ее основы. А во-вторых, почему ты решил, что тебе достаточно знать одну лишь арифметику?

— Я, Мария Львовна, не собираюсь в вуз, должно быть пойду в ПТУ.

— Ну и что, разве в ПТУ, а потом на работе тебе не понадобится математика, алгебра, геометрия? Вот что говорил Михаил Иванович Калинин таким же ученикам, как ты: «Какую бы науку вы ни изучали, в какой бы вуз ни поступали, в какой бы области ни работали, если вы хотите оставить там какой-нибудь след, то для этого везде необходимо знание математики... Если вы хотите участвовать в большой жизни, то наполняйте свою голову математикой, пока есть к тому возможность. Она окажет вам потом огромную помощь во всей вашей работе».

Нина не выдержала и вмешалась.

— Вот послушай стихотворение:

Ракета небо прочеркнула,
Ей в космос путь давно не нов.
Не слышно рокота и гула
Уж из-под облачных ковров.
И укрощенный мирный атом
Послушен разуму людей;
Над Падуном, плотиной сжатым,—
Свет электрических огней!
Все это — плод людских исканий,
Все это создано не вдруг

Могучей силой точных знаний
И мастерством рабочих рук!
И прежде чем, заметьте кстати,
Ракете той был дан прицел,
Ее маршрутом математик
На крыльях формул пролетел.
Сухие строки уравнений —
В них сила разума влилась,
В них — объяснение явлений,
Вещей разгаданная связь!

— Откуда ты, Нина, все это знаешь? — удивленно спросил Сергей.

— А ты почитай все книги, которые здесь лежат в шкафу, и узнаешь не только это, но и многое другое.

Сергей после недолгого раздумья обратился к учителю:

— Мария Львовна, а почему математика такая важная наука, что ее все должны хорошо знать? В чем ее могущество?

— Вопрос твой, Сергей, очень серьезный, и сегодня я не смогу подробно и полно на него ответить. Скажу только, что могущество математики состоит в ее абстрактности, в ее высокой степени общности. Ты, например, знаешь по физике формулу второго закона Ньютона $F=ma$. Она выражает зависимость между силой, массой и ускорением тела и только. А вот в математике, когда мы эту формулу записываем в виде $z=xy$, то тем самым выражаем не только второй закон Ньютона, но и зависимость площади прямоугольника от длины его сторон ($S=ab$), и зависимость пройденного пути от скорости и времени ($s=vt$), и еще многие другие зависимости. Следовательно, все свойства зависимости $z=xy$, которые установит математика, верны и для физических зависимостей силы от массы и ускорения, пути от скорости и времени, зависимости площади прямоугольника от длин его сторон и т. д.

— А какие тут могут быть свойства? — иронически спросил Сергей.

— Ну, это ты и сам должен знать. Например, если z — постоянно, не изменяется, то x и y находятся в обратно пропорциональной зависимости. Это значит, что если сила (площадь, путь) постоянна, то масса и ускорение (длины сторон, скорость и время) обратно пропорциональны. А если x или y постоянны, то z и y (или z и x) прямо пропорциональны, и еще много других свойств.

— Мария Львовна,— обратилась к учительнице Нина,— вопрос о том, зачем нам изучать математику, зачем надо ее знать, непонятен не только одному Сергею, а многим нашим ученикам. Может быть, вы бы более подробно побеседовали с нами по этому вопросу, вот было бы хорошо!

— Что же, действительно, нужно поговорить со всеми по этому вопросу. Но учтите, что такие беседы можно провести лишь после уроков, поскольку на уроках у нас для этого нет времени. Как ты думаешь, Сергей, согласятся ли ребята остаться после уроков для беседы?

— Конечно, согласятся,— уверенно заявил Сергей.

БЕСЕДА 1. МАТЕМАТИКА КАК МЕТОД И ЯЗЫК ПОЗНАНИЯ ОКРУЖАЮЩЕГО МИРА

Как устроен окружающий мир? Каковы законы развития природы? Как можно их использовать для блага людей? Можно ли подчинить некоторые явления природы человеку? Каким образом можно преобразовать мир? Подобного рода вопросы волновали и волнуют человечество с незапамятных времен. Гениальные умы строили гипотезы, доказывали одни из них и опровергали другие, спорили. Преодолевая заблуждения, люди шли к истине. Как ее познать? Где тот волшебный фонарь, который освещает путь к истине?

В течение многих веков для изучения явлений окружающего мира создавались разные науки, каждая из которых изучала определенные стороны этого мира, определенную область явлений или процессов в природе и обществе.

В любой науке в той или иной степени приходится изучать не только качественные особенности предметов, явлений или процессов, но и пространственные и количественные особенности.

Для изучения количественных и пространственных особенностей различных предметов, явлений или процессов в разных науках надо было разработать общий *метод изучения* этих особенностей. Вот этот всеобщий метод и разрабатывается в математике. Это предельно четко сформулировал Ф. Энгельс (1820—1895) в своем определении математической науки.

Он указал, что математика занимается изучением особой стороны любых предметов, явлений или процессов окружающего мира, а именно *количественных отношений* и *пространственных форм*. Следовательно, когда в той или иной науке исследуют тот или иной объект (явление, процесс), то, рассматривая количественные отношения или пространственные формы в этих объектах (а без такого рассмотрения изучение будет совершенно неполным и малозначимым), с необходимостью используют математические методы, математический аппарат.

Каждая наука, пользуясь математическими методами, строит определенную схему-представление об изучаемом предмете (явлении или процессе). Эта схема-представление в виде какой-то формулы, уравнения или в виде геометрического образа называется *математической моделью* изучаемого объекта (предмета, явления, процесса). Затем с помощью этой модели делают логические выводы, справедливость которых проверяют на практике, в эксперименте. Если результаты практической проверки подтверждают справедливость этих выводов-следствий построенной модели, то это служит свидетельством правильности модели; если же хотя бы один из выводов-следствий не подтверждается на практике, то ученые уточняют разработанную модель или же вовсе отказываются от нее и строят новую модель изучаемого объекта.

Движение к истине, к познанию подлинных законов природы и общества идет через построение все более точных, более правильных математических моделей изучаемого предмета (явлений, процессов).

Таким образом, математика занимается разработкой методов построения и методов изучения конкретных математических моделей для различных наук. Для этого она строит математический аппарат, разрабатывает математические понятия. Например, числовые системы (системы натуральных, рациональных и действительных чисел), которые вы изучаете в школе, являются примером такого математического аппарата, с помощью которого в самых различных науках строятся математические модели той стороны изучаемых объектов (предметов, явлений), которая связана с измерением величин. Функция представляет собой другой пример математического аппарата, с помощью которого в различных науках строятся конкретные математические модели изучаемых явлений или процессов и т. д.

При построении математических моделей используется особый *математический язык* (совокупность символов и обозначений, принятых в математике).

Именно поэтому говорят, что математика представляет собой всеобщий язык науки. Эту сторону математики уже давно выделяли. Так, например, еще Галилей почти 400 лет тому назад писал: «Философия написана в грандиозной книге — Вселенной, которая открыта нашему пристальному взгляду. Но понять эту книгу может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она изложена. Написана же она на языке математики...»[1].

Математический язык, в отличие от языка, на котором мы говорим в обыденной жизни, является очень удобным для краткого и точного описания различных понятий и зависимостей многих наук: физики, химии, биологии, а также, казалось бы, далеких от математики, как экономика, лингвистика (наука о языке), психология и т. д. Математический язык дает возможность не только описывать те или иные зависимости, характеризующие конкретные явления или процессы, но и осуществлять проверку этих зависимостей путем сопоставления результатов вычислений с результатами, найденными опытным путем. Формулировка зависимостей той или иной науки на математическом языке позволяет также делать различного рода предсказания и новые открытия чисто математическим путем. Так, например, была открыта планета Нептун с помощью одних вычислений, и лишь затем ее обнаружили с помощью телескопов в указанном Леверье в 1845 г. месте небесного свода.

Сейчас уже всеми признается справедливость замечания Карла Маркса, что *любая наука только тогда достигает совершенства, когда она пользуется математикой.*

Особенностью математического метода изучения явлений окружающего мира является то, что он позволяет избежать ошибок, присущих нашему восприятию, и увидеть то, что недоступно даже воображению. Приведем один пример.

Как вы думаете, где больше точек: в отрезке длиной 1 см или в отрезке длиной 3 см? Наше непосредственное восприя-

[1] Во времена Галилея всю науку называли философией.

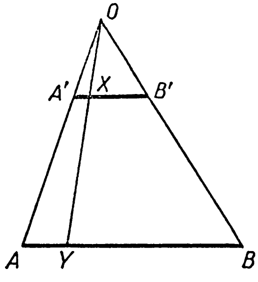


Рис. 1

тие подсказывает нам, что во втором отрезке точек больше, чем в первом. Между тем еще давно было показано, что это неверно. Вот как следует рассуждать.

Построим отрезки $a=3$ см и $a'=1$ см так, чтобы они были параллельны друг другу. Затем через точки A и A', а также через точки B и B' проводим лучи до взаимного пересечения в точке O (рис. 1). Будем считать, что точке A' соответствует точка A, а точке B' — точка B. Возьмем на отрезке $A'B'$ произвольную точку X и проведем через нее из точки O луч, он пересечет отрезок AB в точке Y. Будем считать точку Y соответствующей точке X. Таким образом мы сумеем каждой точке X отрезка $A'B'$ поставить в соответствие единственную точку Y отрезка AB. При этом верно и обратное, а именно каждой точке Y отрезка AB соответствует одна и только одна точка X отрезка $A'B'$. Это и означает, что множество точек на этих двух отрезках одинаковое.

Данный пример показывает, как прав гениальный математик Леонард Эйлер (1707—1783), который писал:

«Именно математика в первую очередь защищает нас от обмана чувств и учит, что одно дело — как на самом деле устроены предметы, воспринимаемые чувствами, другое дело — какими они кажутся; эта наука дает надежнейшие правила; кто им следует — тому не опасен обман чувств».

БЕСЕДА 2. **БЕЗ МАТЕМАТИКИ НИ ШАГУ**

Как мы установили в первой беседе, математика является тем инструментом, без которого в настоящее время невозможно полноценное развитие никакой науки, с помощью которого наиболее эффективно производятся многочисленные исследования во многих науках. Следовательно, изучение какой-либо науки требует глубокого знания математики. Если же учесть, что все современное производство, сельское хозяйство, сфера обслуживания строятся на научной основе, то станет понятным следующее утверждение академика А. Н. Колмогорова: «Без знания математики нельзя понять ни основ современной техники, ни того, как ученые изучают природные и социальные явления».

Действительно, вспомните, с чем вы встречались на уроках физики, химии, географии, истории и по другим предметам? Вы встречались с разного рода формулами, вычислениями разных величин, датами, схемами, таблицами, диаграммами и т. д. А ведь все это математика. Значит, изучение почти любого предмета в школе предполагает хорошее знание математики, и без нее вы не можете освоить эти предметы.

Может показаться, что на уроках музыки, пения, рисования, физкультуры, труда математика не нужна. Но это опять-таки неверно. И на этих уроках вы все время встречаетесь с разного рода измерениями и вычислениями, например имеете дело с ритмом (а ведь законы ритма изучает математика), с перспективой (а это тоже математика) и т. д. Так что в школе вы действительно ни шагу не можете сделать без математики.

Но не только в школе. Разве в обыденной повседневной жизни вы можете обойтись без математики? Нет, конечно. И здесь вы часто встречаетесь с разного рода расчетами, измерениями, просто даже не замечая этого. Без математики вы не обходитесь ни один день.

В народном хозяйстве в настоящее время имеется более 6 тысяч профессий, владение которыми требует хорошего знания математики, устойчивых навыков ее использования. И с каждым годом число таких специальностей растет. Поэтому без настойчивого изучения математических законов нельзя стать хорошим специалистом.

Вот Сергей собирается поступать после восьмилетки в ПТУ. Будет ли он учиться на токаря, слесаря, механика, шофера или строителя, всюду ему понадобится умение читать технические чертежи, производить разного рода расчеты, вычисления. Значит, без математики ему не обойтись. И к этому он должен себя готовить, пока учится в школе.

Применение математики в производстве приносит поразительные результаты. Как-то королева Англии пригласила к себе великого Ньютона. Она попросила его сходить на ее монетный двор и подсчитать, сколько дополнительных помещений, станков и рабочих надо добавить там, чтобы выпускать в 1,5 раза больше монет. Ньютон провел полдня на монетном дворе, вникая в производство. Остальное время суток он находился за письменным столом, занимаясь расчетами, а утром предложил королеве такое решение: можно, не добавляя ни одного нового помещения, станка и рабочего, увеличить выпуск монет в два раза. Для этого достаточно произвести лишь некоторое изменение в организации производства: изменить последовательность операций, переставить станки, по-иному использовать станки и распределение работ и др.

Задача, подобная той, которую решил Ньютон, сейчас имеет массовый характер: как рациональнее организовать перевозку грузов, как раскроить материал, чтобы было меньше отходов, как получить максимальную прибыль из данного производства и т. д. За разработку общего метода решения подобных задач наш советский математик академик Л. В. Канторович стал лауреатом Нобелевской премии.

А возьмите военное дело. Там математика также имеет самое широкое применение. Послушайте стихотворение М. Барзаковского:

Как воздух,
Математика нужна.
Одной отваги
Офицеру мало.
Расчеты! Залп! —
И цель поражена
Могучими ударами
Металла.
И воину
Припомнилось на миг,
Как школьником
Мечтал в часы ученья
О подвиге,
О шквалах огневых,
О яростном
Порыве наступленья.

Но строг учитель был,
И каждый раз
Он обрывал мальчишку
Резковато:
«Мечтать довольно!
Повтори рассказ
О свойствах круга
И углах квадрата!»
И воином
Любовь сбережена
К учителю,
Далекому, седому,
Как воздух
Математика нужна
Сегодня
Офицеру молодому.

БЕСЕДА 3. МАТЕМАТИКА УМ В ПОРЯДОК ПРИВОДИТ

Слова «Математика ум в порядок приводит» принадлежат великому М. В. Ломоносову (1711—1765). Что он имел в виду?

Дело в том, что наше мышление, перерабатывая ощущения, восприятия и представления о предметах и явлениях, как бы предвосхищает будущее, указывает нам, как поступить, что сделать в создавшейся ситуации. Поэтому от того, как «работает» наше мышление, зависит, поступим ли мы правильно и разумно или нет.

Человек рождается без умения мыслить, лишь с задатками к нему. Мыслить он научается постепенно в процессе жизненной практики, в общении со взрослыми и своими сверстниками, и особенно в обучении.

Одним из наиболее важных качеств мышления является его логичность, т. е. способность делать из правильных посылок (суждений, утверждений) правильные выводы, находить правильные следствия из имеющихся фактов.

О человеке, у которого хорошо развито логическое мышление, говорят, что он основательно мыслит, дисциплинированно рассуждает. Такой человек, как правило, не допускает ошибок в своих рассуждениях и выводах. Хорошо развитое логическое мышление предостерегает человека от промахов и ошибок в практической деятельности. И вот оказывается, что это ценнейшее качество возникает и развивается главным образом в процессе изучения математики, ибо математика — это практическая логика, в ней каждое новое положение получается с помощью строго обоснованных рассуждений на основе ранее известных положений, т. е. строго доказывается. Ломоносов приведенными выше словами и имел все это в виду. На это же значение изучения математики указывал М. И. Калинин, призывая молодежь серьезно изучать математику: «Математика дисциплинирует ум, приучает к логическому мышлению. Недаром говорят, что математика — это гимнастика ума».

В связи с этим легко понять, почему так важно самому выводить формулы, доказывать тождества и теоремы. Ведь дело не в том, чтобы вы запомнили их на всю жизнь. Возможно, что они забудутся, но останется привычка рассуждать, сохранится умение объяснять, доказывать не только другим, но и самому себе какие-то истины, укрепится умение искать и находить рациональные пути решения возникающих в жизни проблем.

Вот эту культуру, дисциплину мысли, ее последовательность и доказательность, глубину и критичность, широту и оригинальность, а также необходимую пищу для мышления — систему знаний — вам дает школа, и в частности уроки математики. Эта сторона обучения математике особенно важна в наши дни, поскольку сейчас объем необходимых для человека знаний резко и быстро возрастает, поэтому необходимо каждому научиться самостоятельно пополнять свои знания. Овладеть этими умениями вам поможет добросовестное самостоятельное изучение математики.

Изучение математики формирует не только *логическое мышление,* но и много других качеств человека: сообразительность, настойчивость, аккуратность, критичность и т. д.

Очень важным среди них является пространственное воображение, т. е. умение представить в уме (вообразить) какие-то предметы, фигуры и при этом увидеть их не только неподвижными, но и в изменении, т. е. представить, что произойдет, если их как-то переместить, повернуть и т. д. При изучении математики, при решении геометрических задач вам все время приходится делать это, и тем самым у вас постепенно развивается эта важная способность. Почему важная? Поясним на примерах. Токарь, получив чертеж, должен до работы представить себе образ той детали, которую ему нужно выточить. А портниха должна обладать хорошими способностями к пространственному воображению, чтобы правильно раскроить материал. Эти же умения и способности позволяют шахматисту направлять фигуры на доске, а полководцу — войска на поле боя. Художник или писатель должен уметь детально вообразить ту ситуацию, которую он хочет описать. Высокий уровень ориентировки в пространстве является необходимым условием для спортсмена, позволяющим ему овладеть своим телом. А инженер? А оператор? А космонавт?... Нет такой области человеческой деятельности, где не нужны были бы хорошие умения и способности к пространственному воображению.

Эта же способность представить в уме — вообразить — важна и для планирования своей работы, своих действий с тем, чтобы они были наиболее разумными, рациональными и безошибочными.

Изучение математики, решение математических задач развивают, помимо пространственного воображения, и способность догадываться, угадывать заранее результат, способность разумно искать правильный путь в самых запутанных условиях. Прочтя задачу и еще не производя никаких действий, вы уже научились сразу видеть, что тот или иной способ непригоден для ее решения, а вот какой-то другой способ может быть использован.

Как видим, математику следует глубоко и серьезно изучать не только потому, что она служит основой научного познания, не только потому, что без нее нельзя сделать ни шагу в жизни, в практической деятельности на любой работе, но и потому, что процесс ее изучения способствует развитию у человека важнейших качеств и способностей.

Поэтому хотя изучение математики и требует большого и упорного труда, но оно приносит так много пользы, столь много радостей познания и преодоления трудностей, что вы никогда не пожалеете о затраченных усилиях.

ЗАДАНИЕ 1

Попытайтесь самостоятельно ответить на вопросы и решить задачи, приведенные ниже. Если вы это не сможете сделать, то прочтите указания или ответы, которые приведены в конце книги, и попробуйте еще раз самостоятельно выполнить заданные упражнения. Если и после этого вы не сумеете это сделать, то постарайтесь разобраться коллективно или обратитесь за консультацией к учителю.

1.1. Почему стол на трех ножках на любом полу стоит не шатаясь, а стол на четырех ножках весьма часто шатается?

1.2. Портной, для того чтобы проверить, является ли лоскут материала квадратом, перегибал его по диагонали и смотрел, совпадают ли при этом вершины лоскута. Достаточна ли такая проверка? Почему?

1.3. Где, в каких науках используется декартова система координат?

1.4. Возьмите учебник физики. Проверьте, сумеете ли вы понять его содержание, если вдруг забудете всю математику.

1.5. Найдите в учебнике истории те страницы, на которых излагается изучаемая вами сейчас тема. Есть ли там математика?

1.6. Вспомните определение модуля числа. Пусть числу x на координатной прямой соответствует точка X. Каков геометрический смысл выражения $|x-2|$? Истолкуйте с этой точки зрения уравнение $|x-2|+|x-5|=a$. Сообразите, при каких значениях a это уравнение не имеет решений. А при каких значениях a оно имеет бесконечное множество решений?

1.7. Докажите, что четных натуральных чисел столько же, сколько и нечетных.

1.8. Числа, кратные 10, очевидно, составляют лишь часть всех натуральных чисел. Между тем вам, должно быть, не трудно доказать, что их не меньше, а столько же, сколько всех натуральных чисел. В чем причина такого парадоксального (необычного) положения?

ЧЕМУ НАДО УЧИТЬСЯ В МАТЕМАТИКЕ

Беседы Марии Львовны вызывали оживленные разговоры, споры между учениками. На переменах, по дороге домой после уроков они обсуждали услышанное, спорили. Многие ученики рассказали дома своим родным об этих беседах. Взрослые, работающие на заводах, в учреждениях, в институтах, подтвердили большую роль и значимость математики в их работе, приводили много примеров, когда крайне нужны были математические знания.

Наибольшие споры вызвало замечание Саши, хорошего ученика, увлекающегося литературой и историей, что главное, чему надо научиться в математике,— это разного рода расчетам, измерениям, а все остальное — многочисленные теоремы, определения и прочее — можно спокойно забыть. Нина пыталась переубедить Сашу, доказать, что нельзя овладеть умениями разного рода расчетов и измерений, не зная их теории, не понимая сущности математических действий и операций. Кроме того, ведь применения математики в жизни отнюдь не сводятся к одним лишь расчетам и измерениям. Математика широко используется как общий метод описания и изучения количественной стороны различных явлений и процессов.

Нину, к ее удивлению и радости, поддержал Сергей.

— Мне кажется, что важно научиться математически мыслить, т. е. обоснованно, четко, последовательно, логически правильно рассуждать. И всему этому как раз и учит математика. Я вот сам,— заявил Сергей,— когда ею занялся в последнее время по-настоящему, почувствовал, как стал совсем по-иному рассуждать, мыслить... И меня это очень радует. Но для этого, конечно, надо заниматься и овладевать не только расчетами и измерениями, но овладевать теорией, всякими, как Саша говорит, теоремами, определениями.

Однако полностью Сашу не удалось переубедить, тем более что его поддержали несколько учеников, которые по математике отставали. В конце одного из уроков Нина обратилась к учительнице.

— Мария Львовна, у нас в классе возник спор: чему надо учиться в математике? Что именно следует понять и знать, чем надо овладеть в математике? Может быть, Вы нам обо всем этом расскажете, очень просим Вас.

— Что же, вопрос важный и интересный. Давайте, как и раньше, после уроков, обсудим разные стороны этого большого и сложного вопроса.

БЕСЕДА 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

Чтобы ответить на вопрос, чему учиться в математике, надо разобраться в том, что она — математика — собой представляет, в чем ее особенности, что и как она изучает и из каких элементов (объектов) она состоит. Конечно, все эти вопросы очень сложные, и мы подробно в них разобраться не сумеем, но получить хотя бы некоторое представление обо всем этом нам необходимо, ибо иначе просто невозможно решить, чему же учиться в математике.

Математика, как и другие науки, изучает окружающий нас мир, природные и общественные явления, но изучает лишь особые стороны этих явлений.

Представьте себе, что нужно рассчитать, сколько надо купить краски, чтобы покрасить потолок комнаты, если известно, что на окраску 1 м^2 уходит 120 г краски, или сколько нужно купить кафельных плиток для облицовки стены, если известно, что плитка имеет форму квадрата со стороной 15 см. Во всех этих случаях совершенно безразлично, какого цвета этот потолок или стена, из какого материала они построены и т. д. Важно лишь знать их форму и размеры. В этом случае говорят, что мы отвлекаемся *(абстрагируемся)* от всех свойств рассматриваемого предмета и выделяем лишь его форму и размер. В результате такого абстрагирования получаем *математический объект* — геометрическую фигуру.

В других случаях, кроме формы и размера, учитывают еще взаимное расположение частей фигуры.

Такие математические объекты, как числа, образуются путем выделения при рассмотрении различных совокупностей (множеств) однородных предметов таких общих свойств, как количество предметов в совокупности или их порядок следования, абстрагируясь от всех других свойств этих предметов (их неодинаковости, материала, цвета, величины и т. д.).

Вообще любые математические объекты — это результат выделения из предметов и явлений окружающего мира особых количественных и пространственных свойств и отношений и абстрагирования от всех других свойств. Следовательно, математические объекты реально не существуют, нет в окружающем нас мире геометрических точек, фигур, чисел и т. д. Все они созданы человеческим умом в процессе исторического развития людей и существуют лишь в мышлении человека и в тех знаках и символах, которые образуют математический язык. Поэтому говорят, что математические объекты — это *идеальные объекты,* отражающие (описывающие) реальные объекты.

Обратите внимание еще на одну особенность математических объектов. При их образовании мы не только отвлекаемся от многих свойств соответствующих предметов, но и приписываем им такие свойства, которыми никакие реальные предметы не обладают. Так, например, образуя такой математический объект, как прямая линия, мы в соответствующих предметах (край линейки, стола, луч света, нить и т. д.) не только абстрагируемся от всех их свойств, кроме свойства протяженности, но и приписываем такое свойство, как неограниченная протяженность в обоих направлениях, хотя никакой из указанных реальных предметов таким свойством не обладает. Точно так же никакая совокупность реальных предметов не является бесконечной, а вот множество натуральных чисел бесконечное, или никакой предмет не является бесконечно раздробленным, а вот число — размер этого предмета, мы считаем бесконечно раздробляемым, т. е. число можно делить на какое угодно большое число частей, и т. д.

Итак, математика изучает особые идеальные математические объекты, которые образуются путем сложной мыслительной деятельности людей в процессе познания количественных свойств и отношений, а также пространственных свойств и форм предметов и явлений окружающего мира.

Поэтому первое, чему надо учиться в математике,— это умению в процессе изучения каких-то предметов или явлений для решения задач по определению количественной стороны или пространственных соотношений этих предметов или явлений образовывать, создавать математические объекты. Рассмотрим в качестве примера такую задачу.

Задача. *Для того чтобы укрепить железную дымовую трубу, было решено на высоте 20 м от ее основания прикрепить растяжки из стального каната, которые закрепить к четырем бетонным тумбам, находящимся на расстоянии 15 м от основания трубы. Сколько каната для этого потребуется?* (Рис. 2.)

Решение. Примем дымовую трубу за отрезок прямой, перпендикулярной поверхности земли, а бетонные тумбы — за точки на поверхности земли. Так как для нахождения длины всего потребного каната для четырех растяжек достаточно найти длину одной из них, то получаем такую геометрическую задачу: «Найти длину гипотенузы прямоугольного треугольника, катеты которого равны 20 и 15 метрам».

В этом примере реальные объекты — труба, бетонные тумбы, канаты — мы заменили математическими объектами — отрезками прямых, точками, для чего пришлось абстрагироваться (отвлечься, не учитывать) от таких особенностей этих реальных объектов, как конусность и толщина трубы, размеры тумб, высота их над поверхностью земли и т. д. Иными словами, реальное явление, описанное в при-

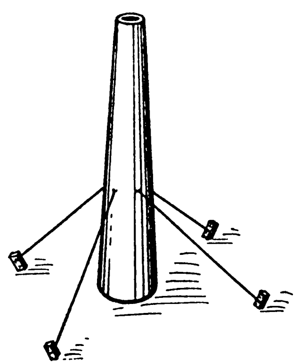


Рис. 2

веденной задаче, мы заменили *идеализированным* явлением — геометрической задачей, а поэтому наше решение является приближенным. Однако точность здесь вполне достаточная для практики (ошибка может быть в пределах нескольких сантиметров).

Вообще надо помнить, что математическое решение любой практической задачи всегда является приближенным.

Для того чтобы закрепить полученные знания и проверить себя, как вы их усвоили, выполните следующее задание.

ЗАДАНИЕ 2

2.1. Какие геометрические фигуры выступают в качестве идеальных образов (моделей) реальных предметов в следующих практических задачах:

а) Найти площадь пятикопеечной монеты.

б) Найти длину обруча.

в) Найти площадь комнаты.

От каких свойств реальных предметов мы при этом абстрагируемся, а какие учитываем?

2.2. За билетами в театр стоит очередь. Какие математические объекты характеризуют положение (место) каждого человека в этой очереди? Какие практические задачи можно решить с помощью этих математических объектов?

2.3. Велосипедист выехал из города A в 9 ч утра и прибыл в город B, отстоящий от A на расстоянии 60 км, в 12 ч дня. Отдохнув в B 2 ч, он поехал дальше в город C, отстоящий от B на 72 км, и прибыл туда в 6 ч вечера.

Как можно наиболее просто и наглядно математически описать событие поездки велосипедиста из A в C? Какие практические задачи можно решить, имея это математическое описание? Какие математические объекты при этом использованы?

БЕСЕДА 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Всякий математический объект обладает какими-то *свойствами*. Так, например, треугольник обладает такими свойствами: 1) имеет три стороны; 2) три внутренних угла; 3) шесть попарно равных внешних углов и т. д. Подобные утверждения о наличии или отсутствии у данного объекта какого-либо свойства называются *суждениями*. Вот еще примеры суждений: 1) четырехугольник имеет две диагонали; 2) за каждым натуральным числом непосредственно следует в натуральном ряду другое натуральное число; 3) четное число делится на два и т. д.

Суждениями являются также *предложения*, указывающие на отношения или связи объектов, например: «5 больше 3», «AB является стороной треугольника ABC», «Угол A не является смежным с углом B» и т. д. А вот вопросы или требования не являются суждениями.

Среди свойств какого-либо объекта имеются **существенные** и **несущественные** для его определения. Свойство является существенным, если оно присуще этому объекту и без него оно не может существовать. Несущественные свойства — это обычно случайные, их отсутствие, как правило, не влияет на существование объекта. Заметим, что при решении конкретных задач несущественные вообще свойства объектов могут иметь и существенное значение для решения данной задачи.

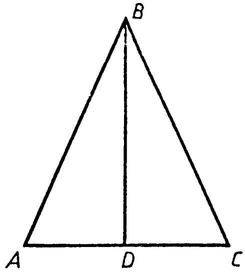


Рис. 3

Рассмотрим, например, равнобедренный треугольник, изображенный на рис. 3. Его свойства: 1) стороны треугольника AB и BC равны; 2) медиана BD перпендикулярна основанию AC и делит угол B пополам — это существенные свойства этого треугольника. А вот свойства: 3) основание AC равнобедренного треугольника ABC горизонтально или 4) вершина равнобедренного треугольника обозначена буквой B — являются **несущественными**. Если мы как-то повернем этот треугольник и его основание при этом окажется расположено не горизонтально или обозначим вершину какой-то другой буквой, то ведь треугольник не перестанет быть равнобедренным.

Поэтому, чтобы понимать, что это за объект, достаточно знать его существенные свойства. В этом случае говорят, что имеется *понятие* об этом объекте. Следовательно, *понятие* — это целостная совокупность суждений о существенных свойствах соответствующего объекта. Эта совокупность взаимосвязанных свойств объекта (поэтому она называется целостной) называется *содержанием понятия* об этом объекте.

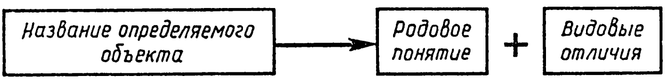
Заметим, что когда говорят о математическом объекте, то обычно имеют в виду все множество объектов, обозначаемых одним термином (названием). Так, когда говорят о математическом объекте — треугольнике, то имеют в виду все геометрические фигуры, являющиеся треугольниками. Множество всех треугольников составляет *объем понятия* о треугольнике. Точно так же множество всех натуральных чисел составляет объем понятий о натуральном числе. Следовательно, *объем понятия* — это множество всех объектов, обозначаемых одним и тем же термином.

Итак, всякое понятие имеет определенный объем и *содержание*. Они взаимосвязаны: чем больше объем понятия, тем меньше его содержание, и наоборот: чем меньше объем, тем больше *содержание понятия*. Так, например, объем понятия «равнобедренный треугольник» меньше объема понятия «треугольник», ибо в объем первого понятия входят не все треугольники, а лишь равнобедренные. А вот содержание первого понятия, очевидно, больше содержания второго, ибо равнобедренный треугольник обладает не только всеми свойствами треугольника, но и особыми свойствами, присущими только равнобедренным треугольникам.

В содержание понятия о каком-либо математическом объекте входят много различных существенных свойств этого объекта. Однако, для того чтобы распознать объект, установить, принадлежит ли он к данному понятию или нет, достаточно проверить наличие у него лишь некоторых существенных свойств. Указание этих существенных свойств объекта понятия, которые достаточны для распознавания этого объекта, называется *определением понятия.*

Всякое определение математического понятия строится обычно так: сначала указывается название *объекта* этого понятия, затем перечисляются такие его существенные свойства, которые позволяют установить, является ли тот или иной предмет объектом данного понятия или нет.

Например, определение параллелограмма: «Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого параллельны». Как видим, это определение построено так: сначала указано название объекта определяемого понятия — параллелограмм, затем указаны такие его свойства: 1) параллелограмм — это четырехугольник; 2) противоположные его стороны параллельны. Первое свойство — это указание того более общего понятия, к которому принадлежит определяемое понятие. Это более общее понятие называется *родовым* по отношению к определяемому понятию. В данном случае родовым понятием для параллелограмма является четырехугольник. Второе свойство — это указание *видового* свойства, которое отличает параллелограмм от других видов четырехугольника. Вот еще пример определения: «Четными числами называются такие натуральные числа, которые кратны числу 2». Это определение, так же как и предыдущее, построено по такой схеме:



В данном случае мы имеем: название определяемого понятия — четные числа, родовое понятие — натуральные числа, видовые отличия — кратны числу 2.

Определение понятий по этой схеме называется *определением через род и видовые отличия.*

Иногда в математике встречаются и другие способы определения понятий. Рассмотрим, например, определение треугольника: «Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков». В этом определении указано родовое понятие для треугольника — фигура, а в качестве видового отличия указан способ построения такой фигуры, которая является треугольником: нужно взять три точки, не лежащие на одной прямой, и соединить каждую их пару отрезком. Такое определение называется *генетическим* (от слова *генезис* — происхождение). Вот еще пример генетического определения: «Симметрией относительно точки называется такое преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая точка X фигуры F переходит в точку X' фигуры F', построенной следующим образом: на продолжении отрезка OX за точку O откладывается отрезок OX', равный OX». Здесь в качестве видовых отличий преобразования симметрии относительно точки от других видов преобразований указан способ построения точек фигуры F', симметричной фигуре F относительно точки O.

Встречаются в математике и такие определения, в которых указывается, как можно получить объекты определяемого понятия один за другим по порядку. Например, определение арифметической прогрессии дается таким образом: «Числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом, называется арифметической прогрессией». Здесь определяемое понятие — арифметическая прогрессия, родовое понятие — числовая последовательность, в качестве видового отличия указан способ получения всех членов прогрессии, начиная со второго, состоящий в том, что для получения какого-либо члена надо к предшествующему члену прибавить одно и то же число. Это определение можно записать в виде следующей формулы:

$$a_n = a_{n-1} + d, \text{ где } n \geqslant 2.$$

Такое определение называется *индуктивным* (от слова *индукция* — наведение на *умозаключение* от частного к общему) или *рекуррентным* (от слова *рекурсия* — возвращение).

Однако не все математические понятия могут быть логически определены указанными выше способами. Действительно, каждое определение математического понятия сводит определяемое понятие к более широкому (более общему, т. е. имеющему больший объем) родовому понятию, определение родового понятия сводит его к еще более широкому понятию и т. д. Очевидно, что этот процесс сведения одних понятий к более широким, более общим понятиям должен иметь конец, он не может быть бесконечным. Иными словами, в конечном итоге определения понятий мы должны прийти к таким понятиям, которые уже не сводимы к другим, т. е. они логически не определяемы. Такие понятия в математике называются *первичными* или *основными*.

Например, определяя параллелограмм, мы сводим его к понятию четырехугольника, определяя четырехугольник, мы сводим его к понятию многоугольника, затем к понятию геометрической фигуры, которая сводится при определении к понятию точки. Понятие точки уже является не определяемым, т. е. первичным. Первичными понятиями в математике, кроме точки, являются понятия прямой, плоскости, принадлежать, числа, множества (совокупность) и некоторые другие.

Итак, второе, чему нужно научиться в математике,— это умению строить определения математических понятий каким-либо способом. Это умение довольно сложное, и мы о нем поговорим еще в следующей беседе. А пока выполните следующее задание, чтобы закрепить те сведения, которые вы получили в данной беседе.

ЗАДАНИЕ 3

3.1. Какие из приведенных ниже свойств трапеции являются существенными, а какие несущественными:

а) Две стороны трапеции параллельны.

б) Оба угла при большем основании острые.

в) Сумма углов трапеции, принадлежащих к одной боковой стороне, равна 180°.

г) Основания трапеции горизонтальны.

д) Оба угла при меньшем основании трапеции тупые.

3.2. Как связаны между собой математические объекты и математические понятия?

3.3. Укажите, какие из приведенных ниже предложений являются суждениями, а какие ими не являются:

а) В треугольнике проведены три медианы.

б) Медианы треугольника пересекаются в одной точке.

в) Чему равно произведение степеней с одинаковыми основаниями?

г) Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов множителей.

3.4. В приведенных ниже определениях выделите название объектов определяемых понятий, родовое понятие и видовые отличия:

а) Числа, которые можно записать в виде обыкновенных дробей, называются рациональными.

б) Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

в) Две прямые на плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.

г) Если точка O является серединой отрезка AB, то точки A и B называются симметричными точками относительно точки O.

3.5. Сформулируйте генетическое определение окружности, зная, что она образуется в результате вращения отрезка на плоскости вокруг одного из его концов, второй конец этого отрезка в этом случае описывает окружность.

3.6. Члены последовательности Фибоначчи (ок. 1170—1250) задаются с помощью следующей формулы: $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Сформулируйте определение этой последовательности. Какое это определение?

3.7. Приводим следующее описание построения перпендикулярных прямых: «Пусть a и b — две пересекающиеся прямые. При их пересечении образуются четыре угла. Пусть α — один из этих углов. Тогда любой из остальных трех углов будет либо смежным с углом α, либо вертикальным с углом α. Отсюда следует, что если один из углов прямой, то остальные углы тоже прямые. В этом случае мы говорим, что прямые пересекаются под прямым углом, и называем их *перпендикулярными*».

На основе этого описания сформулируйте определение перпендикулярных прямых.

3.8. Модуль числа определяется следующей формулой:

$$|a|=\begin{cases} -a, & \text{если } a<0, \\ a, & \text{если } a\geqslant 0. \end{cases}$$

Сформулируйте словесное определение модуля числа.

3.9. Последовательность называется возрастающей, если каждый ее член больше предыдущего члена. Запишите это определение с помощью формулы.

3.10. Как вы знаете, равнобедренный треугольник — это такой треугольник, у которого две стороны равны, а правильный треугольник — это такой, у которого все стороны равны. Является ли правильный треугольник равнобедренным?

3.11. Укажите ближайшие родовые понятия для следующих понятий: а) квадрат; б) степень с натуральным показателем; в) вертикальные углы; г) простое число; д) хорда.

3.12. Укажите несколько родовых понятий для понятия ромб.

3.13. Нужно ли (и можно ли) доказывать определения?

БЕСЕДА 6. **КАК ПРАВИЛЬНО СТРОИТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ**

Одно и то же математическое понятие может быть определено различными способами. Например, такое простейшее понятие, как «треугольник», в разных учебниках по математике определяется по-разному: «Треугольник — это замкнутая ломаная линия, состоящая из трех звеньев», «Многоугольник, имеющий три стороны, называется треугольником», «Если A, B и C — любые три точки, не лежащие на одной прямой, то объединение трех отрезков AB, BC и AC называется треугольником». В предыдущей беседе мы привели еще и другое определение треугольника. Все эти определения правильные.

Однако иногда ученики, воспроизводя определения, имеющиеся в учебнике, или строя определения самостоятельно, допускают разные ошибки. Чтобы строить и воспроизводить определения математических понятий правильно, нужно знать основные т р е б о в а н и я к логическому определению понятий. Рассмотрим эти требования, попутно указывая наиболее часто встречающиеся ошибки в определении математических понятий.

1. *Определения должны быть научно правильными.*

Это означает, что, определяя то или иное понятие, надо это сделать так, чтобы не исказить научный смысл этого понятия. Так, например, смысл понятия «отношение» (в математике) состоит в том, что оно есть какое-то *число.* Между тем иногда это понятие определяют так: «Отношение есть сравнение двух чисел или величин посредством деления». Но *сравнение* есть некоторый процесс, а не число. В данном случае неверно выбрано родовое понятие и тем самым искажен научный смысл определяемого понятия.

Другой пример. Иногда приходится слышать от ученика такое определение: «Абсолютной величиной, или модулем числа, называется это число без знака». Получается, что существуют какие-то числа без знака, но таких чисел (кроме нуля) математика не знает: в математике рассматриваются лишь положительные, отрицательные числа и нуль, других чисел нет. Если число написано без знака, то это положительное число, а не какое-то «беззначное». Поэтому приведенное определение неверное.

2. *Определения не должны содержать «порочного круга».*

Один ученик на вопрос, что такое умножение, например, ответил: «Умножением называется действие отыскания произведения». Когда же его спросили, а что такое произведение, он с уверенностью заявил, что это результат умножения. Следовательно, у этого ученика получается, что умножение определяется через понятие произведения, а произведение через понятие умножения. Получается «порочный круг» в определении. Ясно, что такой способ определения является грубо ошибочным.

Еще пример ошибки «порочного круга» в определении: «Угол называется прямым, если его стороны перпендикулярны» и «Прямые называются перпендикулярными, если при пересечении они образуют прямые углы». Схему этих двух определений можно изобразить так (рис. 4).

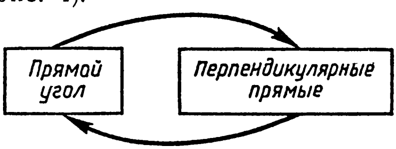


Рис. 4

Как видим, эти определения действительно образуют «порочный круг».

Следовательно, строя определения математических понятий, надо следить за тем, чтобы они не образовали друг с другом «порочного круга».

3. *Определение должно содержать указание на ближайшее родовое понятие.*

Как бы ни было построено определение математического понятия, в нем должно быть указано ближайшее родовое понятие к определяемому понятию.

Нарушение этого требования приводит к различным ошибкам. Так, например, иногда учащиеся, формулируя определения, вовсе не указывают родовое понятие. На вопрос, какие фигуры называются равновеликими, они отвечают: «Это если две фигуры имеют равные площади». Что означает «это», можно лишь догадываться. Или: на предложение сформулировать определение равнобедренных треугольников, иногда можно услышать такой ответ: «Это такие, у которых две стороны равны».

Такая небрежность в формулировке определений недопустима. Другой тип ошибок связан с тем, что в определении указывается не ближайшее родовое понятие, а более широкое. Вот пример такого определения: «Параллелограмм есть фигура, у которой противоположные стороны параллельны». В этом определении указано не ближайшее для параллелограмма родовое понятие — «четырехугольник», а более далекое, более широкое — «фигура». И тем самым это определение становится неверным, ибо фигурой, у которой противоположные стороны параллельны, может быть не только параллелограмм, но и, например, правильный шестиугольник.

Или другой пример. Давая определение диаметра круга, ученик сформулировал его так: «Диаметр круга есть прямая, проходящая через центр круга». Ученик указал в качестве родового понятия прямую, а ведь диаметр — это не вся прямая, а лишь отрезок прямой.

4. *Определение не должно быть тавтологией,* т. е. повторяющей в иной словесной форме ранее сказанное. Сущность такой ошибки заключается в том, что понятие определяется через само себя. Вот примеры тавтологии в некоторых определениях: «Сложением называется действие, при котором числа складываются» (здесь сложение определено через понятие «складывание», что одно и то же). «Фигура A называется симметричной фигуре B, если они расположены симметрично относительно оси симметрии» (здесь «симметричные фигуры» определены через понятие «фигуры, расположенные симметрично»). Ясно, что такие определения являются грубо ошибочными.

5. *Определение должно быть достаточным.*

Это означает, что в определении должны быть указаны все признаки, позволяющие однозначно выделить объекты определяемого понятия. Если же это требование нарушается, то под определение можно подвести не только объекты определяемого понятия, но и другие объекты. Так, например, иногда ученики дают такое определение смежных углов: «Смежными называются углы, которые в сумме составляют 180°». Недостаточность этого определения становится очевидной, если взглянуть на рис. 5: на нем

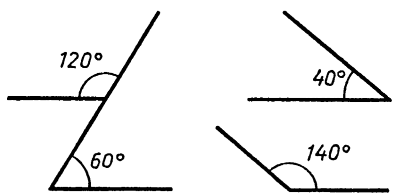


Рис. 5

изображены две пары углов, сумма которых равна 180°, но они не смежные. Ошибка здесь в том, что указано лишь одно свойство смежных углов, оно недостаточно для их определения. Можно было бы, например, так определить их: «Смежными называются два угла, имеющие общую сторону, которые расположены в разных полуплоскостях от этой общей стороны и в сумме составляют 180°».

П р и м е р. Ученик определяет медиану треугольника следующим образом: «Медианой треугольника называется отрезок, делящий его сторону пополам». Очевидно, что и в этом определении указано недостаточное число признаков медианы. Поэтому под это определение подходят не только медиана треугольника, но и средняя линия (ведь и она делит сторону треугольника пополам) и вообще любой отрезок, делящий сторону треугольника пополам. Для построения правильного определения медианы треугольника надо добавить еще и такой признак: «Медиана выходит из вершины треугольника». Тогда получаем такое правильное определение: «Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны».

6. *Определение не должно быть избыточным.*

Это означает, что в определении не должно быть указано лишних признаков, являющихся следствием других признаков определяемого понятия. Например, весьма часто встречается такое определение ромба: «Ромбом называется параллелограмм, все стороны которого равны между собой». Это определение явно избыточное, ибо достаточно равенства двух смежных сторон параллелограмма для того, чтобы были равны все его стороны. Следовательно, правильнее определять ромб следующим образом: «Ромбом называется параллелограмм, две смежные стороны которого равны».

Вот другой п р и м е р: «Диаметром круга называется наибольшая хорда, проходящая через центр круга». Здесь первый признак «наибольшая» является следствием второго признака «проходящая через центр», а второй является следствием первого. Поэтому правильное определение такое: «Диаметром круга называется хорда, проходящая через центр круга» или: «Диаметром круга называется наибольшая хорда».

Мы указали лишь основные требования к определению математических понятий и привели примеры ошибок, возникающих при нарушении этих требований.

Для того чтобы избежать таких ошибок, надо знать эти требования, учитывать их при формулировании тех или иных определений, учиться строить правильные определения.

ЗАДАНИЕ 4

4.1. В приведенных ниже определениях выделите название определяемого понятия, родовое понятие и видовые признаки:

а) Треугольник называется прямоугольным, если один из его углов прямой.

б) Значение переменной, которое обращает уравнение в истинное равенство, называется корнем уравнения.

в) Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины.

г) Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется ее средней линией.

д) Квадратное уравнение, приведенное к нормальному виду, называется неполным, если хотя бы один из его коэффициентов (кроме первого) равен нулю.

4.2. Проанализируйте приведенные ниже определения и установите, какие из них правильные, а какие неправильные, и в этом случае укажите характер ошибки. Как исправить ошибочные определения?

а) Биссектрисой треугольника называется прямая, делящая угол треугольника пополам.

б) Параллельными прямыми называются такие прямые, которые не пересекаются.

в) Диаметром окружности называется хорда, проходящая через середины двух других параллельных хорд.

г) Касательной к окружности называется прямая, которая касается окружности.

д) Десятичная дробь — это дробь с запятой между какими-нибудь ее цифрами.

е) Вертикальными углами называются два равных угла, если стороны одного из них служат продолжениями сторон другого.

ж) Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

з) Параллелограмм, в котором углы, образованные диагоналями с одной из его сторон, равны, называется прямоугольником.

4.3. Фигура «крест» строится следующим образом: на двух пересекающихся прямых откладываются от точки пересечения по разные стороны от нее на каждой из этих прямых равные отрезки. Сформулируйте определение этой фигуры «крест».

4.4. Действие «осреднение» дробей, обозначаемое знаком $\odot$, состоит в следующем: $\frac{a}{b} \odot \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Постройте определение этого действия.

БЕСЕДА 7. **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ**

В определениях математических понятий указываются такие свойства объектов, которые дают возможность распознать однозначным образом эти объекты, т. е. установить относительно любого объекта, принадлежит ли он к объему данного понятия или нет.

Например, в определение диаметра круга входят такие свойства: 1) диаметр круга — это хорда; 2) диаметр круга проходит через центр круга. Если какой-либо объект удовлетворяет обоим этим свойствам, то его можно назвать диаметром круга; если же он не удовлетворяет хотя бы одному из этих свойств, то это не диаметр круга.

Заметим, что в любом определении имеется элемент произвола: то, что, например, хорду круга, проходящую через центр, называют диаметром, является чисто условным, ибо мы могли бы ее назвать и каким-то другим именем. Произвольность проявляется и в выборе свойств, включаемых в определение. В данном случае мы могли бы включить в определение диаметра другие свойства, например такие: 1) диаметр — это отрезок, соединяющий точки окружности; 2) диаметр — это отрезок, проходящий через середину хорды; 3) диаметр — это отрезок, перпендикулярный этой хорде. Тогда определение диаметра было бы таким: «Диаметр круга — это отрезок, соединяющий точки окружности и проходящий через середину какой-либо хорды перпендикулярно к ней».

Приняв то или иное определение данного математического понятия, мы приобретаем возможность логического выведения непосредственных *следствий* из этого определения по такой схеме: *«Если какой-либо объект A является объектом определяемого понятия, то он обладает всеми теми свойствами, которые указаны в его определении».*

Например, если мы знаем, что некий объект A есть диаметр круга и в качестве определения этого понятия было принято первое из указанных выше, то A есть хорда круга и A проходит через центр.

Точно так же, если мы знаем, что некий объект A есть многочлен и многочлен определен нами как алгебраическое выражение, представляющее собой сумму одночленов, то A есть алгебраическое выражение и A есть сумма одночленов.

Обратно, если нам известно, что некий объект A обладает всеми свойствами, которые указаны в определении понятия, называемого именем B, то мы можем назвать объект A именем B. Например, если мы знаем, что объект A является хордой и A проходит через центр круга, то A можно назвать диаметром круга. Точно так же, если мы знаем, что A есть алгебраическое выражение и A есть сумма одночленов, то A можно назвать многочленом.

Однако ведь в содержание понятия входят много других свойств соответствующих объектов, кроме указанных в определении.

Поэтому, чтобы иметь достаточно полное представление о понятии, надо знать не только его определение, но и другие, наиболее важные свойства объектов этого понятия.

Тем более надо знать важнейшие свойства первичных (основных) понятий, ибо ведь им в математике вовсе не даются определения. Свойства первичных понятий математики были установлены в процессе многовековой практической деятельности людей и принимаются в математике без доказательства, т. е. без особого логического обоснования, их обоснованием служит человеческий опыт. Эти принимаемые нами свойства первичных понятий называются *аксиомами* (греческое слово, означающее *значимое, достойное уважения, принятое*).

Вот примеры аксиом из курса геометрии:

1. *Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие прямой, и точки, не принадлежащие прямой.*

2. *Через любые две точки можно провести прямую и только одну.*

3. *Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости.* И т. д.

Эти аксиомы указывают свойства понятий: «точка», «прямая», «плоскость» — и отношений между ними: «принадлежит», «разбивает» — и служат косвенными определениями всех этих понятий. А именно: мы называем точками, прямыми, плоскостями и их отношениями: принадлежит, разбивает — такие объекты и их отношения, которые удовлетворяют этим и всем другим аксиомам геометрии.

В школьной арифметике и алгебре обычно аксиомы в явном виде не формулируются, но, конечно, они имеются и там. Вот примеры аксиом, которыми вы всегда пользуетесь в своих рассуждениях:

1. *Единица есть натуральное число, предшествующее всем другим натуральным числам.*

2. *За каждым натуральным числом непосредственно следует в натуральном ряду еще одно натуральное число.*

3. *Всякое число равно самому себе.*

4. *Если число a равно b, то и b равно a.*

5. *Если a равно b и b равно c, то a равно c.* И др.

Эти аксиомы косвенно определяют (характеризуют) исходные понятия: *число, единица, натуральное число* — и отношения между ними: предшествует, следует, равенство и др.

Что касается важнейших свойств понятий, не являющихся основными, для которых введено какое-то логическое определение, то в математике все эти свойства доказываются, т. е. выводятся как логические следствия из определений, аксиом и ранее доказанных свойств.

Эти доказываемые свойства определяемых понятий в математике называются по-разному. Большинство из них называются *теоремами.* Более простые теоремы называются *следствиями,* некоторые называются *признаками.* Так, например, теорему: «Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны» называют следствием из предшествующих теорем об углах, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, а теорему: «Две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу» — называют признаком параллельности прямых.

В арифметике и алгебре доказываемые свойства называются *формулами, тождествами, правилами.* Но как бы ни назывались эти свойства, все они различаются лишь внешним образом, а по устройству, по составу они в основном одинаковы. А именно: развернутая формулировка всех этих математических предложений, которые для простоты мы будем называть *теоремами,* состоит из трех частей: 1) *разъяснительной части,* в которой даются названия объектов, рассматриваемых в данной теореме; 2) *условие теоремы* — это указание тех свойств объектов, принимаемых за истинные, которые нам даны; 3) *заключение теоремы* — указание тех свойств, наличие которых нужно доказать.

Рассмотрим, например, признак (теорему) делимости натурального числа на 3: «Если сумма цифр числа делится на 3, то и число делится на 3». Здесь первая часть — это название рассматриваемого объекта: натуральное число; условие — сумма цифр числа делится на 3; заключение — число делится на 3.

Другой пример: «Если у треугольника два угла равны, то он равнобедренный». Здесь разъяснительная часть — треугольник, условие — два его угла равны, заключение — треугольник равнобедренный.

В ряде случаев такое развертывание содержания теоремы весьма трудно произвести. Возьмем, например, алгебраическое тождество:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

— Какие объекты здесь рассматриваются?

— Можно по-разному ответить на этот вопрос, но наиболее подходящий ответ — алгебраические выражения.

— Что о них нам известно, дано?.. Обратите внимание на левую часть тождества...

— Это выражение представляет собой разность квадратов двух членов.

— Что же нам нужно доказать?

— Нужно доказать, что заданное выражение может быть представлено как произведение суммы этих членов на их разность.

Следовательно, данное тождество можно сформулировать в виде следующей теоремы: «Если алгебраическое выражение представляет собой разность квадратов двух членов, то оно может быть представлено в виде произведения суммы этих членов на их разность».

Еще пример теоремы: «Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную к ней прямую и только одну».

В этой теореме объектом служит некоторая прямая и точка, условие состоит в том, что эта точка взята на прямой, заключение — существует прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная к заданной прямой, притом такая прямая единственная. Или иначе: среди прямых, проходящих через данную точку, имеется одна и только одна прямая, перпендикулярная к заданной прямой.

Как видим, анализ теоремы требует глубокого проникновения в ее содержание, и хотя такой анализ иногда трудно выполнить, но он очень полезен: выполнив такой анализ, мы глубже начинаем понимать сущность теоремы. Результат анализа теоремы можно записать в краткой символической форме по схеме: *дано — требуется доказать.* Например, символическая запись последней теоремы будет такой:

Дано: $A \in a$.

Доказать: *существует прямая b, проходящая через точку A, такая, что $b \perp a$, прямая b — единственная.*

Анализ содержания теоремы, составление ее развернутой формулировки и краткой символической записи помогают в составлении *обратной теоремы,* которая получается из данной путем перемены местами условия и заключения теоремы.

Возьмем такую теорему: «Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис».

Анализ теоремы позволяет ее записать в следующем виде:

Дано: *окружность центра O вписана в треугольник ABC.*

Доказать: OA, OB, OC — *биссектрисы* $\triangle ABC$.

Поменяв местами условие и заключение теоремы, не изменяя объект теоремы, получаем обратную теорему:

Дано: OA, OB, OC — *биссектрисы* $\triangle ABC$.

Доказать: O — *центр окружности, вписанной в* $\triangle ABC$.

Получим верную (справедливую) теорему: «Точка пересечения биссектрис треугольника служит центром окружности, вписанной в этот треугольник».

Заметим, что вопрос о том, какую из этих двух теорем считать прямой, а какую обратной, решается по-разному в зависимости от той системы теорем, которая принята в учебнике: можно считать прямой первую из этих теорем, а вторую — обратной, а можно и наоборот: считать прямой вторую теорему, а первую — обратной.

Но это лишь в том случае, когда обе теоремы (прямая и обратная) справедливы. Если же обратная теорема неверна, то вопрос решается всегда однозначным образом: верную теорему называют прямой.

Например, рассмотрим теорему: «Вертикальные углы равны».

Ее символическая запись такая:

Дано: *углы A* и *B — вертикальные.*

Доказать: $\angle A = \angle B$.

Образуем обратную теорему:

Дано: $\angle A = \angle B$.

Доказать: *углы A и B — вертикальные.*

Получим такую теорему: «Если два угла равны, то они вертикальные».

Нетрудно убедиться, что это утверждение неверно, ибо можно указать много равных углов, не являющихся вертикальными.

Поэтому в данном случае прямой теоремой можно назвать только первое суждение.

Развернутая формулировка теоремы позволяет выразить ее в понятиях *необходимых* и *достаточных* условий.

Обычно теорему можно представить как закономерную связь двух суждений — условия A и заключения B в таком виде: *если A, то B*. Если эта теорема верна, то в математике принято говорить еще так: *A есть достаточное условие для B*, а *B есть необходимое условие для A*.

Например, теорема: «Диагонали прямоугольника равны» — состоит из таких суждений: A — четырехугольник есть прямоугольник, заключение B — диагонали четырехугольника равны. Тогда развернутая формулировка этой теоремы будет такой: «Если четырехугольник является прямоугольником, то его диагонали равны».

Так как эта теорема верна, то связь между суждениями A и B можно выразить еще и так:

1) Для того чтобы диагонали четырехугольника были равны, *достаточно,* чтобы он был прямоугольником.

2) Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, *необходимо*, чтобы его диагонали были равны.

Рассмотрим теперь обратное утверждение: если B, то A, т. е.: «Если в четырехугольнике диагонали равны, то он является прямоугольником».

Очевидно, что это суждение неверно, ибо можно указать четырехугольники с равными диагоналями, например равнобочную трапецию, которые не являются прямоугольниками. Поэтому условие B не является достаточным для A и A не является необходимым для B. В результате получаем, что A является достаточным, но не необходимым условием для B (для того чтобы диагонали четырехугольника были равны достаточно, но необходимо, чтобы четырехугольник был прямоугольником), а B является необходимым, но недостаточным условием для A (для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо, но недостаточно, чтобы его диагонали были равны).

Однако, если бы теорему сформулировать несколько иначе, а именно принять за ее объект не четырехугольник, а параллелограмм, т. е.: «Если параллелограмм является прямоугольником, то его диагонали равны», то обратная ей теорема: «Если диагонали параллелограмма равны, то он является прямоугольником» — будет верна. В этом случае условие A окажется не только достаточным, но и необходимым для заключения B и B окажется не только необходимым условием для A, но и достаточным, т. е.:

1) Для того чтобы диагонали параллелограмма были равны, необходимо и достаточно, чтобы он являлся прямоугольником.

2) Для того чтобы параллелограмм был прямоугольником, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были равны.

Таким образом вы, вероятно, убедились, что каждому из вас полезно уметь:

1) вычленять из формулировки теорем (формул, тождеств, правил и т. д.) их объекты, условия и заключения;

2) представить теорему в развернутой условной форме: «если A, то B»;

3) записывать теоремы в краткой символической форме;

4) строить для данной теоремы ей обратную и устанавливать ее справедливость;

5) переводить формулировку теоремы на язык необходимых и достаточных условий.

Конечно, все это надо делать не для каждой теоремы, но все эти умения очень важны.

ЗАДАНИЕ 5

5.1. Проанализируйте состав следующих теорем, выявите их составные части (объект, условие и заключение) и запишите в символической форме:

а) Отношение длины окружности к ее диаметру не зависит от радиуса окружности, т. е. одно и то же для любых окружностей;

б) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

в) Если произведение двух чисел равно нулю, то по крайней мере один из сомножителей равен нулю.

г) Логарифм произведения двух любых положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей.

д) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

5.2. Постройте для следующих теорем обратные теоремы и установите, какие из них верны, а какие неверны:

а) В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

б) Степень частного двух чисел равна частному степеней этих чисел.

в) Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0, то это число делится на 10.

г) Если в треугольнике один угол тупой или прямой, то два других — острые.

5.3. Сформулируйте в виде необходимого и достаточного условия следующие теоремы:

а) Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам.

б) Один из корней квадратного уравнения $ax^2+bx=0$, $a\neq0$, равен нулю.

в) Сумма двух противоположных чисел равна нулю.

г) Равные наклонные, проведенные из одной и той же точки к некоторой прямой, имеют равные проекции.

5.4. В следующих утверждениях многоточия замените словами: «Необходимо и достаточно», «необходимо, но недостаточно», «достаточно, но не необходимо», чтобы полученные утверждения были верными:

а) Для того чтобы четырехугольник был прямоугольником..., чтобы все его углы были равны.

б) Для того чтобы два треугольника были равны..., чтобы стороны одного из них соответственно были равны сторонам другого.

в) Для того чтобы прямая была графиком функции..., чтобы эта функция была линейной.

г) Для того чтобы два угла в сумме составляли 180°..., чтобы эти углы были смежными.

5.5. Даны два суждения A и B. Выясните, каким условием является A для B и B для A, если:

а) A — отрезки a и b равны; B — отрезки a и b центрально симметричны.

б) A — две стороны треугольника равны; B — треугольник равносторонний.

в) A — натуральное число делится на 6; B — натуральное число делится на 3.

БЕСЕДА 8. УЧИТЕСЬ ДОКАЗЫВАТЬ ТЕОРЕМЫ

Усвоить содержание теорем (правил, формул, тождеств и т. д.), которые изучаются в школе, не так уж трудно. Оперируя теоремами, применяя их при решении задач, при доказательстве других теорем, вы непроизвольно усваиваете их содержание, запоминаете их формулировки.

Значительно труднее научиться *доказывать* теоремы. При этом речь идет не о запоминании доказательства той или иной теоремы, которая была рассмотрена на уроке. Специально запоминать доказательство не нужно, нужно научиться самому доказывать теоремы.

Что значит доказать теорему, что такое доказательство? Доказательство в широком смысле — это логическое рассуждение, в процессе которого истинность какой-либо мысли обосновывается с помощью других положений. Поэтому, когда вы убеждаете своего товарища в чем-либо или отстаиваете в споре с ним свое мнение, свою точку зрения, то вы по существу производите доказательство (умело или неумело — это уже другой вопрос). В жизни все время, каждодневно в общении с другими людьми, приходится доказывать те или иные мысли, утверждения, приходится убеждать в чем-то, т. е. доказывать.

Доказательство математических теорем есть частный случай доказательства вообще. Оно отличается от доказательства в житейских условиях или в других науках тем, что оно совершается по возможности чисто дедуктивным способом (от латинского слова *дедукция* — выведение), т. е. выведением новой доказываемой мысли (утверждения, суждения) из ранее доказанных или принятых без доказательства мыслей (аксиом) по правилам логики без каких-либо ссылок на примеры или опыт. В других науках, в житейских обстоятельствах мы для доказательства часто прибегаем к примерам, к опыту. Мы говорим: «Смотри» — и это может служить доказательством. В математике такой способ доказательства недопустим, ссылаться, например, на очевидные отношения, иллюстрируемые чертежом, не разрешается. Математическое доказательство должно представлять собой цепочку логических следствий из исходных аксиом, определений, условий теоремы и ранее доказанных теорем до требуемого заключения.

Таким образом, при доказательстве теоремы мы сводим ее к ранее доказанным теоремам, а те в свою очередь еще к другим и т. д. Очевидно, что этот процесс сведения должен быть конечным, и поэтому всякое доказательство в конце концов сводит доказываемую теорему к исходным определениям и принятым без доказательства аксиомам.

Следовательно, аксиомы служат не только для косвенного определения первичных понятий, но и в качестве оснований для доказательства всех теорем математики. Вот почему в числе аксиом встречаются и такие, которые указывают особые свойства понятий, имеющих логические определения. Так, например, параллельные прямые в курсе геометрии являются не первичным понятием, а определяемым. Однако одно из свойств параллельных прямых, а именно что через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной, мы вынуждены принять за аксиому, ибо, как было установлено великим русским геометром Н. И. Лобачевским (1792—1856), а также немецким математиком К. Ф. Гауссом (1777—1855) и венгерским математиком Я. Больяй (1802—1860), доказать это свойство параллельных прямых на основе лишь остальных аксиом геометрии невозможно.

Всякий шаг доказательства состоит из трех частей: 1) предложение (аксиома, теорема, определение), на основе которого производится этот шаг доказательства; это основание шага доказательства называется *посылкой* или *аргументом;* 2) логическое рассуждение, в процессе которого посылка применяется к условиям теоремы или к ранее полученным следствиям; 3) логическое следствие применения посылки к условиям или ранее полученным следствиям.

В последнем шаге доказательства теоремы в качестве следствия получаем утверждение, которое необходимо было доказать.

Покажем процесс доказательства на примере такой теоремы: «Диагонали прямоугольника равны».

В этой теореме нам дан произвольный (любой) прямоугольник. Для того чтобы легче было рассуждать в процессе доказательства, поступают следующим образом. Начертим вполне определенный

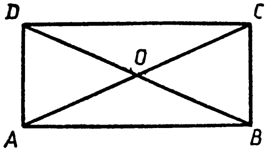


Рис. 6

прямоугольник $ABCD$ (рис. 6), но при доказательстве не будем использовать какие-либо частные особенности этого прямоугольника (например, что его сторона AB примерно в 2 раза больше стороны AD и т. д.). Поэтому наши рассуждения относительно этого определенного прямоугольника будут верны и для любого другого прямоугольника, т. е. они будут иметь общий характер для всех прямоугольников.

Проведем диагонали AC и BD. Рассмотрим полученные треугольники ABC и ABD. У этих треугольников углы ABC и BAD равны как прямые, катет AB — общий, а катеты BC и AD равны как противоположные стороны прямоугольника. Следовательно, эти треугольники равны. Отсюда следует, что стороны AC и BD также равны, что и требовалось доказать.

Все доказательство этой теоремы можно изобразить в виде следующей схемы.

№ шага	Посылки (аргументы)	Условия	Следствия
1.	Определение: *прямоугольник — это четырехугольник, у которого все углы прямые*	$ABCD$ — прямоугольник	$\angle A$ — прямой $\angle B$ — прямой
2.	Теорема: *прямые углы равны*	$\angle A$ — прямой $\angle B$ — прямой	$\angle A = \angle B$
3.	Теорема: *противоположные стороны прямоугольника равны*	$ABCD$ — прямоугольник	$BC = AD$
4.	Первый признак равенства треугольников	$BC = AD, AB = AB$ $\angle B = \angle A$	$\triangle ABC = \triangle BAD$
5.	Определение равенства треугольников	$\triangle ABC = \triangle BAD$ AC и BD — соответственные стороны	$AC = BD$

Самое трудное в доказательстве — это найти последовательность посылок (аксиом, теорем, определений), применяя которые к условиям теоремы или промежуточным результатам (следствиям) в конечном итоге можно получить нужное следствие — доказываемое положение.

Какими правилами нужно руководствоваться при поиске этой последовательности? Очевидно, что эти правила не могут носить обязательный характер, они лишь указывают возможные пути поиска. Поэтому они называются *эвристическими правилами* или просто *эвристиками* (от греческого слова *эврика* — нахожу, нашел). Многие выдающиеся математики, такие, как Папп (древнегреческий математик, живший в III в.), Блез Паскаль (1623—1662), Рене Декарт (1596—1650), Жак Адамар (1865—1963), Дьердь Пойя (1887) и многие другие, занимались разработкой эвристик для поиска доказательства теорем и решения задач. Вот некоторые эвристические правила, которые полезно помнить:

1. *Полезно заменять названия объектов, о которых идет речь в теореме (задаче), их определениями или признаками.*

Например, в рассмотренной выше теореме шла речь о прямоугольнике, и мы для доказательства использовали определение прямоугольника.

2. *Если можно, то нужно доказываемое положение раздробить на части и доказывать каждую часть в отдельности.*

Так, например, доказательство теоремы: «Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм» — можно разделить на две части: сначала доказать, что одна пара противоположных сторон данного четырехугольника параллельна, а затем доказать, что и вторая пара противоположных сторон также параллельна.

Так следует поступать всегда, когда есть возможность доказываемое утверждение разбить на несколько частей более простых утверждений.

3. *В поисках доказательства теоремы полезно идти с двух сторон: от условий теоремы к заключению и от заключения к условиям.*

Например, нужно доказать такую теорему: «Если некоторая последовательность такова, что любой ее член, начиная со второго, является средним арифметическим предшествующего и последующего членов, то эта последовательность — арифметическая прогрессия».

Пойдем от условия теоремы. Что нам дано? Дано, что каждый член последовательности, начиная со второго (обозначим его a_n, $n \geqslant 2$), есть среднее арифметическое предшествующего и последующего членов, т. е. a_{n-1} и a_{n+1}. Значит, верно такое равенство:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \qquad (1)$$

Теперь пойдем от заключения. А что нам нужно доказать? Нужно доказать, что эта последовательность — арифметическая прогрессия. А какая последовательность называется арифметической прогрессией? Вспоминаем определение:

$$a_n = a_{n-1} + d, \text{ где } n \geqslant 2 \text{ и } d \text{ — постоянное число.} \qquad (2)$$

Сопоставляем данное нам условие (1) с заключением (2). Чтобы условие приняло форму заключения, надо преобразовать так:

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}. \qquad (3)$$

Отсюда $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$. (4)

Левая и правая части (4) обозначают одно и то же, а именно разность между двумя последовательными членами заданной последовательности. Если в равенстве (4) n давать последовательно значения 2, 3 и т. д., то получим: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, затем $a_3 - a_2 = a_4 - a_3$ и т. д. Следовательно, все эти разности равны между собой, а это значит, что разность $a_n - a_{n-1}$ есть постоянное число, которое можно обозначить буквой d:

$$a_n - a_{n-1} = d.$$

Отсюда получаем: $a_n = a_{n-1} + d$, а это значит, что согласно определению (2) данная последовательность есть арифметическая прогрессия, что нам и надо было доказать.

Эту эвристику можно и так сформулировать: *надо стараться сблизить условие и заключение теоремы, преобразуя их или заменяя их следствиями.*

Известен и ряд более частных эвристических правил, которые применяются при поиске лишь некоторых теорем. Например, такая эвристика: *для того чтобы доказать равенство каких-либо отрезков, надо найти или построить фигуры, соответствующими сторонами которых являются эти отрезки; если фигуры окажутся равными, то будут равны и соответствующие отрезки.*

Изучая теоремы, нужно не просто запоминать их доказательство, а каждый раз думать и устанавливать, какими методами они доказываются, какими эвристическими правилами руководствовались при нахождении этих доказательств, как догадались (додумались) до этих доказательств.

В ряде случаев для доказательства теорем используется особый прием, называемый «доказательством от противного» или «приведением к нелепости».

Сущность этого приема заключается в том, что предполагают несправедливость (ложность) заключения данной теоремы и доказывают, что такое предположение приводит к противоречию с условием или с ранее доказанными теоремами или аксиомами. А так как любое утверждение может быть либо верным, либо неверным (ничего другого быть не может), то полученное противоречие показывает, что допущение о ложности заключения теоремы неверно и, следовательно, заключение верно, тем самым теорема доказана.

Приведем п р и м е р.

Т е о р е м а. *Две прямые, порознь параллельные третьей, параллельны между собой.*

Д а н о: $a \parallel c$, $b \parallel c$.

Д о к а з а т ь: $a \parallel b$ (рис. 7).

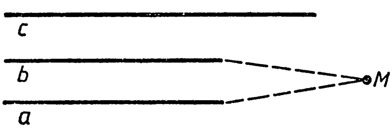


Рис. 7

Прямого (непосредственного) доказательства этой теоремы мы не знаем. Тогда докажем ее методом от противного.

Допустим, что заключение теоремы неверно, т. е. a непараллельна b. Тогда они пересекаются в некоторой точке M. А так как по условию каждая из этих прямых параллельна прямой c, то получается, что через точку M проведены две прямые a и b, параллельные одной и той же прямой c. А мы знаем по аксиоме параллельности, что через точку вне прямой можно провести не более одной прямой, параллельной данной. Пришли к противоречию с аксиомой. Это показывает, что наше предположение о непараллельности прямых a и b неверно, следовательно, $a \parallel b$, что и требовалось доказать.

Другой пример.

Теорема. *Среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше (значит: больше или равно) среднего геометрического этих чисел.*

Эту теорему можно так записать: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ (1), где $a > 0$, $b > 0$. Ее можно доказать как прямым способом, так и способом от противного. Докажем ее способом от противного.

Для этого допустим, что она неверна, т. е. среднее арифметическое меньше среднего геометрического двух положительных чисел:

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}. \qquad (2)$$

Умножим обе части (2) на 2 и, возвысив их в квадрат, получим: $a^2+2ab+b^2<4ab$ или $a^2-2ab+b^2<0$. По формуле квадрата разности двух чисел получаем: $(a-b)^2<0$.

В результате получили явную нелепость: квадрат некоторого числа $(a-b)$ отрицателен, чего быть не может. Следовательно, предположение о неверности теоремы привело к противоречию, что доказывает справедливость теоремы.

Таким образом, доказательство от противного некоторой теоремы состоит в том, что мы делаем допущение о неверности заключения теоремы. Затем делаем ряд логических умозаключений на основе этого допущения, в результате которых приходим к явно нелепому положению (к противоречию с условием или ранее доказанными теоремами, аксиомами). Далее рассуждаем так: если бы наше предположение было бы верным, то мы могли бы прийти лишь к верному выводу, а так как мы пришли к неверному выводу, то это означает, что наше предположение было ложным, следовательно, тем самым мы убедились, что заключение теоремы верно.

Заметим, что если в результате рассуждений мы не получили бы нелепости (противоречия), то это еще не означало бы, что предположение верно. Иными словами, если исходить из верности (справедливости) заключения теоремы и из этого предположения получить верное (очевидное) следствие, то это еще не значит, что предположение верно: может случиться, что исходная теорема как раз неверна.

На этом построены многие *софизмы* (умышленно ложно построенные умозаключения, кажущиеся лишь правильными), этим объясняются многие ошибки, допускаемые при решении задач.

Рассмотрим, например, такое равенство: $a-b=b-a$ (1), где a и b — произвольные числа. Допустим, что (1) верно, тогда возвысим обе части (1) в квадрат, получим:

$$a^2-2ab+b^2=b^2-2ba+a^2.$$

Перенеся все члены в одну сторону и сделав приведение подобных, придем к совершенно верному равенству: $0=0$.

Но отсюда нельзя делать вывод, что и исходное равенство (1) верно. Если бы мы такой вывод сделали, то пришли бы к такому софизму: $2a=2b$ или $a=b$, т. е. любые произвольные числа равны между собой. Ошибка состоит в том, что из равенства квадратов двух чисел не следует равенство самих этих чисел. Например, $(-2)^2=2^2$, но $-2\neq 2$.

Вот пример ошибочного решения задачи.

Задача. *Решить уравнение* $3\sqrt{x}+x+2=0$ (1).

Допустим, что (1) имеет решение и, следовательно, равенство (1) верно. Тогда получим: $3\sqrt{x}=-x-2$.

Возвысим обе части в квадрат: $9x=x^2+4x+4$ или x^2-5x+ $+4=0$, отсюда $x_1=4$, $x_2=1$.

Можно ли найденные значения x считать корнями уравнения (1)? Некоторые ученики отвечают на этот вопрос утвердительно, ибо ведь все преобразования уравнения верные. И все же ни одно из найденных значений x не является корнем (1). Это подтверждает проверка. Подставляя найденные значения x в (1), получаем явно нелепые равенства: $12=0$ и $6=0$.

Таким образом вы должны учиться доказывать теоремы (формулы), тождества и т. д., овладевать общими способами поиска доказательства теорем (эвристическими правилами).

ЗАДАНИЕ 6

6.1. Составьте схему шагов доказательства следующих теорем, указывая посылки, условия и следствия каждого шага:

а) В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является и высотой.

б) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

в) Середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

6.2. Найдите ошибку в доказательстве следующей заведомо ложной теоремы: «Катет прямоугольного треугольника равен его гипотенузе». (Рис. 8, на рисунке должен быть отрезок CM.)

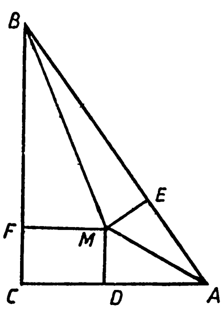


Рис. 8

Проведем в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$) биссектрису угла B и восставим в середине катета AC точке D перпендикуляр к нему. Очевидно, что они пересекутся в некоторой точке M. Из точки M проведем

$MF \perp BC$ и $ME \perp AB$ (рис. 8).

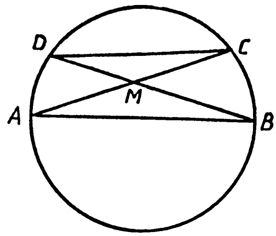


Рис. 9

Рассмотрим треугольники BME и BMF, они оба прямоугольные по построению, гипотенуза MB у них общая, а углы MBF и MBE равны, ибо BM — биссектриса угла B. Следовательно, $\triangle MFB = \triangle MEB$. Отсюда $BE = BF$ (1) и $ME = MF$ (2). $\triangle CMD = \triangle AMD$ как прямоугольные, у которых $CD = AD$ и MD — общая. Тогда $AM = CM$ (3). $\triangle AME = \triangle CMF$ как прямоугольные в силу равенства (2) и (3). Отсюда $AE = FC$ (4). Складывая равенства (1) и (4), получим $AB = BC$, что и требовалось доказать.

6.3. Докажите теорему: «Два треугольника равны, если две стороны и медианы к одной из них одного треугольника равны двум сторонам и медиане к соответствующей стороне другого треугольника» — и установите, какими эвристиками вы пользовались при поиске доказательства.

6.4. Какая ошибка допущена в доказательстве следующей теоремы: «Если длины сторон треугольника пропорциональны числам 3, 4 и 5, то треугольник прямоугольный»?

Доказательство: обозначим стороны этого треугольника a, b и c. По условию $a = 3k$, $b = 4k$ и $c = 5k$. Тогда $a^2 + b^2 = 9k^2 + 16k^2 = 25k^2 = c^2$. Следовательно, по теореме Пифагора этот треугольник прямоугольный.

6.5. Докажите методом от противного теорему: «Во всяком треугольнике против большего угла лежит большая сторона».

6.6. Разберитесь в следующем софизме: «Хорда, не проходящая через центр окружности, равна диаметру».

Проведем в окружности диаметр AB и возьмем на окружности произвольную точку C, отличную от A и B (рис. 9). Соединим C с A. Обозначим середину AC через M и проведем через нее и точку B прямую до пересечения с окружностью в точке D. Соединим D с C. Рассмотрим треугольники ABM и CDM. У них $AM = CM$ по построению, $\angle ABM = \angle DCM$ как вписанные опирающиеся на одну и ту же дугу AD, $\angle AMB = \angle CMD$ как вертикальные, следовательно, по второму признаку равенства треугольников эти треугольники равны. А в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны, следовательно, $AB = CD$.

6.7. В чем ошибка в следующих рассуждениях:

$4:4 = 5:5$ (1). Выносим за скобки общие множители:

$4 \cdot (1:1) = 5 \cdot (1:1)$, а так как $1:1 = 1$ и $4 = 2 \cdot 2$, то получаем $(2 \cdot 2) \cdot 1 = 5 \cdot 1$, или $2 \cdot 2 = 5$.

6.8. Разберитесь в следующем софизме: «Положительное число меньше нуля».

Действительно, пусть $a > b$ (1), где a и b — положительные числа. Умножим обе части (1) на $b - a$, получим: $a(b-a) >$

$> b(b-a)$; $ab-a^2 > b^2-ab$; $0 > a^2-2ab+b^2$; $0 > (a-b)^2$. Но $(a-b)^2$ есть положительное число, ибо $a \neq b$, следовательно, получили, что нуль больше положительного числа.

6.9. Как доказать предложение: «Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых ее сторон».

БЕСЕДА 9. КЛАССИФИКАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

Среди умений, которым учит математика и которым всем вам нужно учиться, большое значение имеет умение *классифицировать* понятия.

Дело в том, что математика, как и многие другие науки, изучает не единичные предметы или явления, а *массовые*. Так, когда вы изучаете треугольники, то изучаете свойства любых треугольников, а их бесконечное множество. Вообще объем любого математического понятия, как правило, бесконечен.

Для того чтобы различать объекты математических понятий, изучить их свойства, обычно эти понятия делят на виды, классы. Ведь, кроме общих свойств, любое математическое понятие обладает еще многими важными свойствами, присущими не всем объектам этого понятия, а лишь объектам некоторого вида. Так, прямоугольные треугольники, кроме общих свойств любых треугольников, обладают многими свойствами, весьма важными для практики, например *теоремой Пифагора,* соотношениями между углами и сторонами и т. д.

В процессе многовекового изучения математических понятий, в процессе их многочисленных применений в жизни, в других науках из их объема были выделены какие-то особые виды, имеющие наиболее интересные свойства, которые чаще всего встречаются и применяются в практике. Так, различных четырехугольников существует бесконечно много, но в практике, в технике наибольшее применение имеют лишь определенные их виды: квадраты, прямоугольники, параллелограммы, ромбы, трапеции.

Деление объема некоторого понятия на части и есть классификация этого понятия. Более точно под классификацией понимают распределение объектов какого-либо понятия на взаимосвязанные классы (виды, типы) по наиболее существенным признакам (свойствам). Признак (свойство), по которому производится классификация (деление) понятия на виды (классы), называется *основанием* классификации.

Правильно построенная классификация понятия отражает наиболее существенные свойства и связи между объектами понятия, помогает лучше ориентироваться в множестве этих объектов, дает возможность устанавливать такие свойства этих объектов, которые наиболее важны для применения этого понятия в других науках и житейской практике.

Классификация понятия производится по одному или нескольким наиболее существенным основаниям.

Так, треугольники можно классифицировать по величине углов. Получаем такие виды: остроугольные (все углы острые), прямоугольные (один угол прямой, остальные острые), тупоугольные (один угол тупой, остальные острые). Если же за основание деления треугольников принять соотношения между сторонами, то получаем такие виды: разносторонние, равнобедренные и правильные (равносторонние).

Сложнее, когда приходится классифицировать понятие по нескольким основаниям. Так, если выпуклые четырехугольники классифицировать по параллельности сторон, то по существу нам нужно разделить все выпуклые четырехугольники одновременно по двум признакам: 1) одна пара противоположных сторон параллельна или нет; 2) вторая пара противоположных сторон параллельна или нет. Получаем в результате три вида выпуклых четырехугольников: 1) четырехугольники с непараллельными сторонами; 2) четырехугольники с одной парой параллельных сторон — трапеции; 3) четырехугольники с двумя парами параллельных сторон — параллелограммы.

Весьма часто производят классификацию понятия поэтапно: сначала по одному основанию, затем некоторые виды делят на подвиды по другому основанию и т. д. Примером может служить классификация четырехугольников. На первом этапе их делят по признаку выпуклости. Затем выпуклые четырехугольники делят по признаку параллельности противоположных сторон. В свою очередь параллелограммы делят по признаку наличия прямых углов и т. д.

При проведении классификации необходимо соблюдать определенные правила. Укажем главные из них.

1. *В качестве основания классификации можно брать лишь общий признак всех объектов данного понятия.*

Так, например, нельзя в качестве основания классификации алгебраических выражений брать признак расположения членов по степеням какой-то переменной. Этот признак не является общим для всех алгебраических выражений, например для дробных выражений или одночленов он не имеет смысла. Этим признаком обладают лишь многочлены, поэтому многочлены можно классифицировать по наивысшей степени главной переменной.

2. *Основанием для классификации надо брать существенные свойства (признаки) понятий.*

Рассмотрим опять понятие алгебраического выражения. Одним из свойств этого понятия является то, что переменные, входящие в алгебраическое выражение, обозначаются какими-то буквами. Это свойство является общим, но не является существенным, ибо от того, какой буквой обозначена та или иная переменная, характер выражения не зависит. Так, алгебраические выражения $x+y$ и $a+b$ — это по сути дела одно и то же выражение. Поэтому классифицировать выражения по признаку обозначения переменных буквами не следует.

Другое дело, если за основание классификации алгебраических выражений взять признак вида действий, с помощью которых переменные соединены, т. е. действия, которые совершаются над переменными. Этот общий признак весьма существенный, и классификация по этому признаку будет правильной и полезной.

3. *На каждом этапе классификации можно применять лишь одно какое-то основание.* Нельзя одновременно классифицировать понятие по двум различным признакам. Например, нельзя классифицировать треугольники сразу и по величине и по соотношению между сторонами, ибо в результате мы получим классы треугольников, которые имеют общие элементы (например, остроугольные и равнобедренные или тупоугольные и равнобедренные и т. д.). Здесь нарушено следующее требование к классификации: *в результате классификации на каждом этапе получаемые классы (виды) не должны пересекаться.*

4. В то же время *классификация по какому-либо основанию должна быть исчерпывающей и каждый объект понятия должен попасть в результате классификации в один и только один класс.*

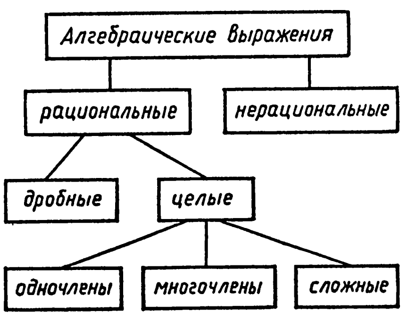
Поэтому разделение всех целых чисел на положительные и отрицательные неверно, ибо целое число нуль при этом не попало ни в один из классов. Надо говорить так: целые числа делятся на три класса — положительные, отрицательные и число нуль.

Часто при классификации понятий явно выделяются лишь некоторые классы, а остальные только подразумеваются. Так, например, при изучении алгебраических выражений обычно выделяют лишь такие их виды: одночлены, многочлены, дробные выражения, иррациональные. Но эти виды не исчерпывают всех видов алгебраических выражений, поэтому такая классификация является *неполной.*

Полная правильная классификация алгебраических выражений может быть произведена следующим образом.

На первой ступени классификации алгебраических выражений они делятся на два класса: рациональные и нерациональные. На второй ступени рациональные выражения делятся на целые и дробные. На третьей ступени целые выражения делятся на одночлены, многочлены и сложные целые выражения.

Эту классификацию можно представить в виде следующей схемы.



ЗАДАНИЕ 7

7.1. Почему нельзя классифицировать рациональные числа по их четности?

7.2. Установите, правильно ли произведено деление понятия:

а) Величины могут быть равными и неравными.

б) Функции бывают возрастающие и убывающие.

в) Равнобедренные треугольники могут быть остроугольными, прямоугольными и тупоугольными.

г) Прямоугольники бывают квадраты и ромбы.

7.3. Произведите деление понятия «геометрическая фигура» по свойству занимать часть плоскости и приведите примеры каждого вида.

7.4. Постройте возможные схемы классификации рациональных чисел.

7.5. Постройте схему классификации следующих понятий:

а) четырехугольник;

б) два угла.

7.6. Проведите классификацию следующих понятий:

а) треугольник и окружность;

б) углы в окружности;

в) две окружности;

г) прямая и окружность;

д) квадратные уравнения;

е) система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

БЕСЕДА 10. **УЧИТЕСЬ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ**

Мы установили, что в математике вы должны учиться многим важным умениям, играющим огромную роль в жизни каждого человека, в его работе: строить математические объекты, правильно определять понятия об этих объектах, устанавливать и доказывать существенные свойства этих понятий, проводить их классификацию. Но есть еще одно трудное, но важное умение, которому вам надо научиться,— это *умение решать задачи.*

Ведь с задачами (житейскими, производственными, научными) человек встречается ежедневно. Любое дело, любая работа в конечном счете сводится к решению задач. Поэтому научиться решать задачи чрезвычайно важно. Конечно, в математике решаются не любые задачи, а лишь математические и сводимые к ним. Но умение решать математические задачи оказывает огромное влияние на общее умение решать задачи, и тот, кто умеет решать эти задачи, сумеет решить и другие.

Поэтому *учитесь, учитесь решать математические задачи!*

Почему некоторые из вас не умеют самостоятельно решать задачи? Почему они не знают, как подступиться к решению новой незнакомой задачи?

Главная причина состоит в том, что эти ученики не понимают сущности задач, сущности их решения, не владеют общими методами поиска их решений.

Решение задач — это сложная работа. Материалом, над которым производится эта работа,— сами задачи, методы их решения — это инструменты для работы, а само решение — это процесс работы, процесс применения инструментов к материалу. Поэтому, чтобы облегчить решение задачи, надо, конечно, знать материал этой работы, т. е. сами задачи — как они устроены, из чего состоят, надо знать и владеть инструментами — методами решения задач, и научиться разумно применять эти инструменты.

Рассмотрим кратко основные особенности задач, решаемых в математике. В математике решаются собственно *математические задачи,* объектами которых являются какие-либо математические объекты, понятия и *практические задачи,* сводимые к математическим задачам, объектами которых являются реальные предметы или явления.

Примерами математических задач являются задачи на решение уравнений, неравенств, разные геометрические задачи и т. д. Примерами практических задач являются задачи, в которых речь идет о движении поездов, о работе, о размерах реальных предметов и т. д.

Для сведения практических задач к математическим реальные объекты, рассматриваемые в этих задачах, заменяются соответствующими математическими объектами (числами, отрезками, функциями и т. д.), и тем самым получается модель практической задачи — математическая задача. Приведем пример.

Задача 1. *Велосипедист едет из одного города в другой со скоростью 10 км/ч. Если бы он ехал со скоростью 12 км/ч, то приехал бы в город на 4 ч раньше. Каково расстояние между городами?*

Для решения этой задачи рассматриваемые в ней реальные объекты — расстояние между городами и скорости велосипедиста — заменяем соответственно математическими объектами — искомое x и числа 10 и 12. Тогда легко составить уравнение:

$$\frac{x}{10}=\frac{x}{12}+4.$$

Это уравнение и есть модель данной задачи — соответствующая математическая задача.

Как устроены задачи? Из каких частей они состоят?

Всякая задача содержит одно или несколько *условий* — высказываний, принимаемых нами за истинные, и одно или несколько *требований.*

Задача 2. *В круге проведены две взаимно перпендикулярные хорды, одна длиной 16 см, другая 14 см. Расстояния этих хорд до центра равны 1 см и 4 см. Определить отрезки, на которые делятся хорды точкой их пересечения.*

Построим указанные в задаче объекты: окружность центра O и две взаимно перпендикулярные хорды. Из центра O опустим на хорды перпендикуляры, чтобы найти их расстояние от центра (рис. 10). Тогда в этой задаче можно выделить следующие условия и требования:

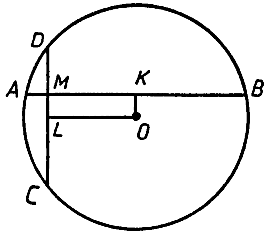


Рис. 10

Условия: 1) O — центр окружности; 2) AB — хорда; 3) CD — хорда; 4) $AB \perp CD$; 5) $AB = 16$; 6) $CD = 14$; 7) M — точка пересечения AB и CD; 8) $OK \perp AB$; 9) $OK = 1$; 10) $OL \perp OD$; 11) $OL = 4$.

Требования: 1) найти AM; 2) найти BM; 3) найти CM; 4) найти DM.

Как видим, эта простая задача содержит 11 условий и 4 требования. А как построены условия? Анализируя их, устанавливаем, что каждое условие содержит один или несколько объектов, о которых идет речь в условиях. Так, в условии 1 имеется один объект — точка O, точно так же в условиях 2 и 3 по одному объекту — отрезки AB и CD, а вот уже в условии 4 два объекта: отрезки AB и CD, а в условии 7 даже три объекта: отрезки AB и CD и точка M. По одному объекту содержат условия 5, 6, 9 и 11 и по два объекта условия 8 и 10.

Если в условии имеется один объект, то указывается его качественная или количественная характеристика. Так, в условии 1 объект — точка O характеризуется как центр окружности, в условиях 2 и 3 — объекты — отрезки AB и CD характеризуются как хорды. Это все качественные характеристики. В условии 5 дается количественная характеристика объекта — отрезка AB, а именно указано, что его длина равна 16. Точно так же в условиях 6, 9 и 11 указаны количественные характеристики рассматриваемых там объектов.

Если же в условии заданы два или более объекта, то указывается соотношение между ними. Так, в условии 4 два объекта — отрезки AB и CD и в нем указано соотношение между ними: они взаимно перпендикулярны. В условии 7 соотношения между тремя ее объектами состоят в том, что один из них — точка M есть точка пересечения двух других объектов — отрезков AB и CD и т. д.

Что касается требований, то в математических задачах наиболее часто встречаются такие виды требований: 1) найти искомое (величину, форму, отношение); 2) преобразовать заданный объект в другой вид; 3) построить некоторый объект с заданными характеристиками; 4) доказать справедливость некоторого утверждения.

В приведенной задаче 2 все четыре требования первого вида. Теперь рассмотрим, в чем состоит решение задачи.

Будем решать задачу 2.

1. В четырехугольнике $OKML$ углы L, K и M — прямые по построению, тогда и угол O также прямой, ибо сумма углов четырехугольника равна 360°.

2. Следовательно, по определению прямоугольника этот четырехугольник $OKML$ — прямоугольник.

3. В прямоугольнике противоположные стороны равны, поэтому $MK=OL$, а OL по условию 11 равен 4, значит, и $MK=4$ и т. д.

Как видим, решение задачи состоит из одного или нескольких шагов. Каждый шаг решения состоит в том, что мы применяем какое-то общее положение математики (определение, теорему, формулу, правило и др.) к условиям задачи или к полученным ранее результатам решения и выводим из этого следствие. Следствием последнего шага решения задачи должно быть то, что требуется в задаче.

Приведем еще один пример.

Задача 3. *Разложить на множители многочлен* x^4+4 (1).

В этой задаче имеется одно условие: x^4+4 — многочлен, и одно требование: преобразовать этот многочлен и представить его в виде произведения двух или нескольких многочленов. Это требование второго вида.

Решение этой задачи состоит из следующих шагов.

1. Прибавим к данному многочлену (1) выражение $4x^2-4x^2$, равное нулю, от этого значение (1) не изменится, получим:

$$x^4+4=x^4+4+4x^2-4x^2. \qquad (2)$$

2. Сгруппируем члены (2) следующим образом:

$$x^4+4+4x^2-4x^2=(x^4+4x^2+4)-4x^2. \qquad (3)$$

Это мы имели право сделать на основе переместительного и сочетательного законов сложения.

3. Применим к выражению, стоящему в скобках в правой части (3), формулу квадрата суммы, получим:

$$(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2. \qquad (4)$$

4. Представим $4x^2$ как $(2x)^2$, тогда имеем:

$$(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2. \qquad (5)$$

5. Применим к правой части (5) формулу разности квадратов:

$$(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x). \qquad (6)$$

Сопоставим все полученные равенства на основе аксиомы: если $a=b$ и $b=c$, то $a=c$, получим окончательно:

$$x^4+4=(x^2+2+2x)\cdot(x^2+2-2x). \qquad (7)$$

Это решение можно изобразить следующей схемой:

№ шагов	Общие положения математики	Условия	Следствия
1.	$a+0=a$	$a=x^4+4$, $0=4x^2-4x^2$	Равенство (2)
2.	Переместительный и сочетательный законы сложения	$x^4+4+4x^2-4x^2$	Равенство (3)
3.	Формула: $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$	x^4+4x^2+4	Равенство (4)
4.	Определение степени одночлена	$4x^2$	Равенство (5)
5.	Формула: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$	$(x^2+2)^2-(2x)^2$	Равенство (6)
6.	Аксиома: если $a=b$ и $b=c$, то $a=c$	Равенства (2), (3), (4), (5) и (6)	Равенство (7)

Итак, решение любой задачи состоит в том, что находят такую последовательность общих положений математики, применяя которые к условиям задачи или к их следствиям в конечном итоге удовлетворяем требованиям задачи.

Наибольшая трудность в решении задачи — это нахождение указанной последовательности общих положений математики. Если эта последовательность уже найдена, то все остальные в решении — применение этих общих положений к условиям задачи или к следствиям, не представляет большого труда.

Для многих задач в самой математике разработаны эти последовательности общих положений, которые образуют известные *общие правила* (или, как говорят, *алгоритмы*) решения задач определенного вида.

Так, например, для производства всех действий над числом имеются готовые правила. Имеются особые правила и для решения многих алгебраических и геометрических задач. Однако большей частью эти правила сформулированы в математике в свернутом виде. Для того чтобы применить их для решения соответствующих задач, вы должны эти свернутые правила развернуть в *пошаговую программу*.

Например, формула $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ есть правило для возвышения двучлена в квадрат. Для применения этого правила к решению какой-либо задачи надо это правило развернуть в пошаговую программу. Покажем, как это делается на примере решения задачи:

Представить в виде многочлена выражение $(2x-3y)^2$.

1-й шаг. Найти в заданном двучлене первый и второй члены	$a=2x,\ b=-3y$
2-й шаг. Возвысить первый член в квадрат	$a^2=4x^2$
3-й шаг. Найти удвоенное произведение членов двучлена	$2ab=2(2x)(-3y)=-12xy$

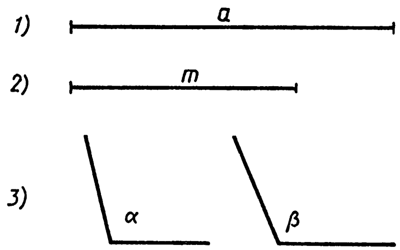
4-й шаг. Возвысить в квадрат второй член	$b^2=(-3y)^2=9y^2$
5-й шаг. Сложить результаты 2, 3 и 4-го шагов	$4x^2-12xy+9y^2$

Математические задачи, для которых в математике имеются готовые правила — программы их решения, называются *стандартными*. Решение стандартных задач особых трудностей не представляет. Надо лишь распознать вид данной задачи, вспомнить соответствующее этому виду задач правило решения, развернуть это правило в пошаговую программу и применить ее к условиям данной задачи.

Значительно труднее решать *нестандартные задачи*, для которых в математике нет готовых правил. Решение нестандартных задач состоит в том, чтобы свести их к решению одной или нескольких стандартных задач. Например, задача 3 является нестандартной, но мы свели ее к решению нескольких стандартных задач. Приведем еще пример.

Задача 4. *Построить трапецию, если даны большее основание, средняя линия и углы при меньшем основании.*

Решение. В этой задаче дано (рис. 11):



1) — большее основание

2) — средняя линия

3) — углы при меньшем основании

Рис. 11

Требование задачи: построить трапецию по заданным элементам. Эта задача нестандартная, ибо в математике нет правила построения трапеции по указанным элементам.

Ищем способ решения.

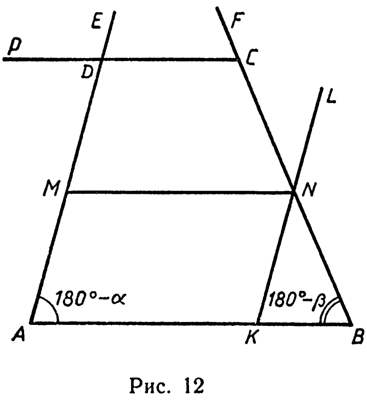


Рис. 12

Пусть $ABCD$ — искомая трапеция (рис. 12). Сразу построить всю трапецию или какую-либо ее часть, как видно, нельзя. Причина состоит в том, что заданные элементы разобщены. Так, заданные углы находятся не при известных большем основании или средней линии, а при неизвестном меньшем основании. Однако, зная углы при меньшем основании, легко найти и углы при большем основании: они дополняют соответствующие углы при меньшем основании до 180°. Найдя их, мы тем самым установим направления боковых сторон трапеции в известных вершинах A и B большего основания. Теперь осталось найти положение средней линии. Для этого заметим, что $NK \parallel AM$ отсекает от AB отрезок $AK = MN$. Следовательно, можно отложить на AB отрезок AK, равный MN, и через точку K провести прямую, параллельную AD, до пересечения с BC в точке N. Тем самым определится середина боковой стороны BC. Отложив от N отрезок NC, равный BN, мы найдем вершину C, а проведя через нее прямую, параллельную AB, найдем и последнюю вершину D.

Таким образом мы свели решение этой нестандартной задачи к решению следующих стандартных задач:

1. *На произвольной прямой отложить отрезок $AB = a$.*

2. *Построить угол, смежный с данным углом α; то же для угла β.*

3. *Построить угол, равный смежному с α, так, чтобы его вершиной была точка A, а одной стороной — отрезок AB, получаем угол BAE*; то же для угла, смежного с β, при вершине B и *стороной BA, получаем угол ABF.*

4. *Отложить от A на прямой AB отрезок $AK = m$.*

5. *Провести через точку K прямую $KL \parallel AE$.*

6. *Найти точку пересечения прямой KL* и *BF, получаем точку N.*

7. *Отложить от точки N на прямой BF отрезок $NC = BN$.*

8. *Провести через точку C* прямую *$CP \parallel AB$.*

9. *Найти точку пересечения прямых CP* и *AE*, получаем точку D.

Фигура $ABCD$ — искомая трапеция.

Все шаги этого решения представляют собой стандартные задачи.

Конечно, надо еще доказать, что построенная фигура действительно есть искомая трапеция, установить условия, при которых задача имеет решения, но это сделать уже нетрудно.

При поиске способа решения нестандартных задач, при сведении их к стандартным надо пользоваться теми же эвристиками, которые мы указали в 8-й беседе. Но эти эвристики в данном случае лучше сформулировать несколько иначе, а именно:

1. *Если можно, надо сложную задачу разбить на несколько более простых задач.*

В рассмотренной выше задаче 4 мы разбили ее на 9 простых стандартных задач. Приведем еще один пример разбиения задачи на простые задачи.

Задача 5. *Построить график функции:*

$$y = \frac{|x+1|}{x+1} + \frac{x-1}{|x-1|} - |x|\,x. \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Сразу построить график этой функции вряд ли возможно. Попытаемся разбить эту задачу на части — более простые задачи, рассматривая заданную функцию в таких

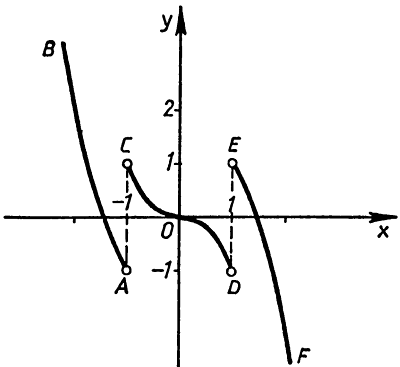


Рис. 13

промежутках изменения x, в которых график функции легко построить. Так как в выражение (1) входят модули $|x+1|$, $|x-1|$ и $|x|$, то естественно рассмотреть те промежутки, в которых значения этих модулей определенные. Очевидно, что для этого надо выделить точки, в которых эти модули меняют свое значение. Этими точками являются числа -1, 1 и 0. Поэтому рассмотрим четыре промежутка: $x<-1$, $-1<x\leqslant 0$, $0<x<1$ и $x>1$. Тем самым наша задача разбивается на 4 более простые задачи.

1. *Построить график функции* (1) *в промежутке* $x<-1$. В этом промежутке

$$y=\frac{-(x+1)}{x+1}+\frac{x-1}{-(x-1)}-x(-x)=-2+x^2.$$

График этой функции мы знаем, как строить, это будет часть параболы AB (рис. 13).

2. *Построить график функции* (1) *в промежутке* $-1<x\leqslant 0$. В этом промежутке $y=\frac{x+1}{x+1}+\frac{x-1}{-(x-1)}-x(-x)=x^2$.
Графиком будет часть параболы OC.

3. *Построить график функции* (1) *в промежутке* $0<x<1$. В этом промежутке $y=\frac{x+1}{x+1}+\frac{x-1}{-(x-1)}-x(x)=-x^2$.
Графиком будет часть параболы OD.

4. *Построить график функции* (1) *в промежутке* $x>1$. В этом промежутке $y=\frac{x+1}{x+1}+\frac{x-1}{x-1}-x-x=2-x^2$.
Графиком будет часть параболы EF.

Таким образом мы полностью построили график функции (1), он состоит, как видим, из четырех частей.

В данном случае разбиение сложной задачи на части — более простые задачи, мы произвели, разбив область задачи на части. Иногда разбиение сложной задачи можно производить разбиением условий задачи на части, а иногда можно разбивать на части требование задачи. Вот пример такой задачи.

Задача 6. *При каких значениях a оба корня уравнения* $x^2-2ax+4=0$ (1) *положительны?*

Решение. Для того чтобы оба корня (1) были положительны, нужно, во-первых, чтобы (1) имело два корня, а для этого, как известно, необходимо, чтобы дискриминант уравнения был неотрицательный. Во-вторых, так как свободный член (1) положительный, то оба корня имеют одинаковые знаки, а поэтому, чтобы они имели знаки «плюс», нужно, чтобы коэффициент среднего члена был отрицательный.

Следовательно, разбив требование задачи на указанные две части, мы разбиваем и саму задачу на две более простые задачи:

1. *При каких значениях a дискриминант уравнения* (1) *неотрицательный?*

$$D=a^2-4\geqslant 0, \text{ отсюда } a\geqslant 2 \text{ либо } a\leqslant -2. \tag{2}$$

2. *При каких значениях a коэффициент среднего члена уравнения* (1) *отрицательный?*

$$-2a<0, \text{ отсюда } a>0. \tag{3}$$

Сопоставляя (2) и (3), получаем окончательно: $a\geqslant 2$. При этих значениях a оба корня (1) будут положительны.

3. ***Если не видно, как решить задачу, то надо попытаться преобразовать ее или заменить другой, равносильной ей.***

Приведем пример.

Задача 7. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y-2}+\dfrac{5y}{x+1}=7 \\ \dfrac{2x}{y-2}-\dfrac{10y}{x+1}=2. \end{cases}$$

Решение. Проще всего эту систему решить, заменив ее другой с помощью подстановки:

$$\frac{x}{y-2}=u, \quad \frac{y}{x+1}=v. \tag{1}$$

Тогда исходная система переходит в следующую, ей равносильную:

$$\begin{cases} u+5v=7 \\ 2u-10v=2 \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем: $u=4$, $v=\frac{3}{5}$. Подставив в (1), получаем новую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y-x}=4 \\ \dfrac{y}{x+1}=\dfrac{3}{5} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x=4y-8 \\ 5y=3x+3 \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем окончательно:

$$x=4, \ y=3.$$

Приведем еще один пример.

Задача 8. *Расстояние между двумя колхозами* 12 км. *Колхозник вышел из своего колхоза в* 9 ч 25 мин *и прибыл в другой в* 13 ч 15 мин. *На следующий день он отправился в обратный путь в* 11 ч *и пришел домой в* 14 ч 40 мин. *На каком расстоянии от его колхоза находится пункт, который колхозник проходил в один и тот же час как на прямом, так и на обратном пути.*

Решение. Обычный способ решения подобных задач — составление уравнения или системы уравнений — в данном случае

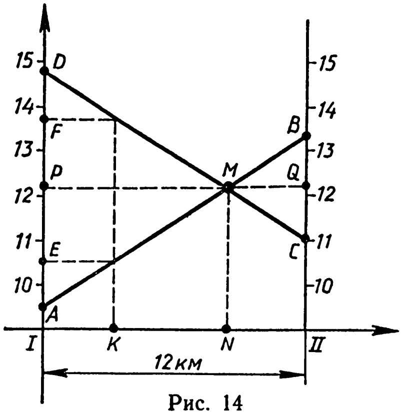


Рис. 14

трудно применить, ибо не видно, как составить уравнение; вопрос задачи уж очень необычный. Проще эту задачу решить, заменяя ее графической моделью.

Для этого в системе координат, где на оси абсцисс откладываем в каком-то произвольном масштабе расстояние, а на оси ординат — время в часах и минутах, притом за начало на оси времени берем не 0 ч, а 9 ч утра, строим графики движения колхозника туда и обратно (прямые AB и CD) (рис. 14).

Если мы возьмем какой-либо пункт на пути колхозника, например пункт K, то этот пункт он проходил на прямом и обратном пути в разное время: на прямом пути в E ч, а на обратном — в F ч. Но есть один пункт N, который он проходил в одно и то же время как на прямом, так и на обратном пути: этот пункт соответствует точке пересечения графиков его движения — точке M. Это и есть искомый пункт.

Чтобы найти расстояние этого пункта от первого колхоза, рассмотрим треугольники AMD и CMB, они подобны. Поэтому их высоты MP и MQ пропорциональны сторонам AD и CB. $AD = 14$ ч 40 мин — 9 ч 25 мин $=5$ ч 15 мин $=315$ мин, $CB = 13$ ч 15 мин — 11 ч $=2$ ч 15 мин $=135$ мин. Получаем такую пропорцию: $PM:MQ = 315:135 = 7:3$. Так как $PM + MQ = PQ = 12$ км, то находим, что $PM = \frac{7}{10} \cdot 12$ км $= 8{,}4$ км.

3. *Если данные и искомые (неизвестные) задачи прямо (явно) не связаны, то надо ввести вспомогательные элементы, которые их связывают.*

Приведем п р и м е р использования этой эвристики.

Задача 9. Эту задачу придумал Исаак Ньютон (1643—1727). *Трава на лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров съели бы всю траву на лугу за 24 дня, а 30 коров — за 60 дней. Сколько коров съедят всю траву на лугу за 96 дней?*

Р е ш е н и е. Непосредственно составить уравнение или систему уравнений по данным задачи нельзя, ибо количество коров и число дней прямо не связаны: они не находятся в прямой или обратной пропорциональности. Чтобы найти связь между ними, введем вспомогательные элементы:

первоначальное количество травы на лугу — a ед.
каждый день там вырастает — b ед.
одна корова за 1 день съедает — c ед.

Теперь можно составить такие уравнения: в первый раз всего травы за 24 дня выросло: $a+24b$, 70 коров за 24 дня съели $70\cdot24c$ ед. травы. Тогда по условию $a+24b=70\cdot24c$. (1)

Аналогично получаем: $a+60b=30\cdot60c$ (2)

$a+96b=x\cdot96c$, где x — искомое количество коров. (3)

Вычитая из (2) почленно (1), найдем: $36b=120c$ или $c=0{,}3b$. (4)

Подставляя значение c из (4) в (1), найдем: $a=480b$. (5)

Подставим значения a и c из (5) и (4) в (3), получим: $576b=$ $=28{,}8x\cdot b$. Так как $b\neq0$, то, сократив на b, найдем: $x=20$ (коров).

Конечно, при решении многих нестандартных задач приходится использовать не одно какое-либо эвристическое правило, а несколько. Знание этих эвристик, владение ими очень помогает при поиске решения нестандартных задач.

Итак, вам надо научиться решать задачи, математические и практические. Для этого прежде всего надо очень внимательно их изучать, анализировать, устанавливать каждый раз условия и требования, содержащиеся в задаче, выяснять, какие объекты, их характеристики и отношения входят в условия, что означают требования задачи. На такой подробный и тщательный анализ не надо жалеть ни времени, ни сил. Только на основе такого анализа будет эффективен ваш поиск способов решения задач. При этом следует помнить, что решение задачи сводится к нахождению таких общих положений математики, применяя которые к условиям задачи или к их следствиям можно удовлетворить ее требования. Поэтому общие положения математики: ее аксиомы, теоремы, правила, формулы, тождества надо знать, надо помнить. Без такого знания вы не сумеете решать задачи.

Нахождение способа решения задачи подобно изобретению, а изобретение требует воображения, догадки, фантазии. Поэтому развивайте у себя эти качества.

А главное — не спешите при решении задач, не стремитесь решить как можно больше задач. Лучше решить меньше задач, но вдумчиво, с пользой. А для этого, решив задачу, обдумайте проделанное решение, установите, в чем своеобразие задачи, ее решения, что нового вы узнали и приобрели, решив эту задачу. Вот это новое, вот те общие и специальные приемы, которые вы использовали при решении этой задачи, постарайтесь запомнить, усвоить. Все это вам пригодится при решении других задач.

ЗАДАНИЕ 8

8.1. Проанализируйте следующие задачи, выделите в каждой из них все условия, установите, какие объекты входят в каждое условие, какие характеристики или отношения между объектами заданы в этих условиях.

а) Путешественник проехал автобусом и по железной дороге всего 600 км, причем автобусом он проехал в 4 раза меньше, чем

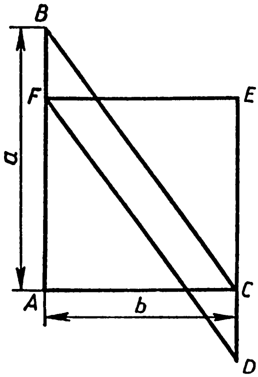


Рис. 15

по железной дороге. Сколько часов был в пути путешественник, если автобусом он проезжал 30 км в час, а по железной дороге 32 км в час?

б) Равнобочная трапеция с боковой стороной, равной 15 см, и углом при большем основании 60° описана около круга. Найти основания трапеции.

8.2. Выясните, какие условия и какие требования содержат следующие задачи:

а) Какая из трех высот равнобедренного треугольника может быть больше его основания?

б) Что больше и на сколько: частное $(x^4-3x^2+1):(x^2-x-1)$ или произведение $(x-10)(x+11)$?

8.3. Напишите пошаговую программу решения следующей задачи, указывая для каждого шага общие положения математики, на основе которых выполняется решение:

Решить неравенство: $2x-\left(1+\frac{7x-13}{9}\right)>\frac{2x-11}{6}+\frac{13-7x}{9}$.

8.4. Решите следующие задачи и установите, какие эвристические правила вы при этом использовали:

а) Через одну из вершин треугольника проведена вне его прямая MN. Зная, что расстояния от других вершин треугольника до прямой MN равны 10 см и 8 см, найти расстояние середин сторон треугольника до прямой MN.

б) Построить треугольник по двум высотам и медиане к третьей стороне.

в) Найти сумму площадей квадрата $ACEF$ и параллелограмма $FBCD$ (рис. 15), если $AB=a$ и $AC=b$.

г) Решить уравнение: $x^{12}-x^9+x^8-x^5+1=0$.

д) Поезд проходит расстояние от A до B за 10 ч 40 мин. Если бы скорость поезда была бы на 10 км/ч меньше, то он пришел бы в B на 2 ч 8 мин позже. Определить расстояние между A и B.

е) На берегу круглого озера четыре пристани K, L, P и Q. От пристани K отплывает катер, а от пристани L одновременно отплывает лодка. Если катер поплывет прямо в P, а лодка — прямо в Q, то они встретятся в некоторой точке X озера. Доказать, что если катер поплывет в Q, а лодка в P, то они достигнут этих пристаней одновременно.

КАК УЧИТЬСЯ МАТЕМАТИКЕ

Беседы Марии Львовны еще долго обсуждались ребятами. В классе, на переменах, по дороге домой они говорили о теоремах, о задачах, о том, что они стали их видеть совсем по-другому, чем раньше. Все чаще среди разговоров возникал вопрос: а как же научиться всему тому, о чем говорила Мария Львовна? Что для этого надо делать?

Как-то после уроков Нина обратилась с этими вопросами к Марии Львовне. Та посоветовала ей найти нужную литературу, подготовить несколько докладов и обсудить их в классе. Нина горячо взялась за это дело, втянула в него других учеников: Сергея, Сашу, Ларису, Инну, распределила между ними темы докладов. Лариса предложила пригласить к участию в их делах своего отца, Павла Степановича — специалиста по НОТ — научной организации труда. Он охотно согласился консультировать ребят, снабдил их нужными книгами. Все начали готовиться к докладам, обращались за помощью к Марии Львовне и Павлу Степановичу. Наконец, началось обсуждение подготовленных докладов. Первый доклад сделала Нина.

ДОКЛАД 1. ОБЩИЕ ПРАВИЛА РАБОТЫ ПО ИЗУЧЕНИЮ МАТЕМАТИКИ

Учение для нас, учащихся,— это работа, труд, и совсем нелегкий. Кто хочет по-настоящему учиться, хочет прочно и глубоко усвоить знания, овладеть умениями и навыками, тот должен работать ежедневно, работать так, как работают наши отцы и матери, передовые рабочие и колхозники.

М. И. Калинин писал: «В математике все основано на непрерывном труде, когда человек непосредственно собственными усилиями как бы поднимается по высокой лестнице обучения все выше и выше».

Однако, для того чтобы эта большая и сложная работа приносила ощутимые результаты, была наиболее эффективной, поднимала нас все выше и выше по лестнице изучения математики, надо строго выполнять ряд правил. Рассмотрим эти общие п р а в и л а рациональной организации учебного труда по изучению математики.

1. *Работа по изучению математики должна быть систематической, ежедневной, без каких-либо перерывов, за исключением, конечно, дней отдыха.*

Уроки по математике бывают ежедневно, и ежедневно мы должны прорабатывать дома изученный на уроках учебный материал, выполнять все задания учителя. Только при этом условии у нас не будет пробелов в знаниях и умениях, которые могут затруднить последующую работу. Ведь в математике все взаимосвязано и любое новое понятие, любое новое действие основано на предшествующих, ранее изученных.

Почему у нас в классе до сих пор имеются слабо успевающие по математике ученики? Ведь раньше, в младших классах, они хорошо учились, успевали, а вот когда-то пропустили несколько занятий, не проработали тщательно изученный материал, не выполнили вовремя домашние работы, в результате образовался в их знаниях небольшой пробел, который они на первых порах даже не заметили, а если и заметили, то не придали этому большого значения. «Подумаешь,— рассуждали до сих пор некоторые из нас,— не знаю какую-то теорему, формулу, не понял доказательство теоремы, вывод формулы. Проживу и без этой теоремы или формулы, ничего страшного». А страшное получается потом, ибо постепенно маленький пробел в знаниях и умениях вызывает большой пробел, и этот пробел, это незнание растет как снежный ком, катящийся с горы. Потом такой ученик спохватывается, сидит не только вечерами, но и ночами над математикой, а толку мало, ибо неосвоенного материала накопилось так много, что «переварить» его уже очень и очень трудно.

Поэтому ни в коем случае нельзя запускать проработку изученного учебного материала, выполнение домашних заданий.

2. *Надо стремиться к тому, чтобы сразу понять все, что изучается на уроках, надо освоить все действия, все умения, которые отрабатываются на уроках.* Главное, что для этого надо делать,— это быть на уроках математики *активным участником.* Учитель объясняет новый материал, доказывает теорему, выводит какую-то формулу. И ты должен вместе с ним заниматься этим доказательством, этим выводом. Не только наблюдать, как он это делает, а делать вместе с ним — в своей тетради или мысленно выполняя каждый шаг, обдумывая при этом, на основе чего сделан этот шаг, зачем он сделан, что он дает.

Учитель опрашивает твоего товарища по пройденному материалу. И ты мысленно, про себя отвечай на все вопросы учителя, замечай все ошибки и недочеты в ответе товарища. И не молчи, а встань и скажи, что ты заметил неточность, как по-твоему надо было ответить на вопрос. Нельзя считать, что ты тем самым якобы подводишь товарища, ведь мы все делаем одно общее дело — мы учимся. Поправляя товарища, ты не только не подводишь его, а помогаешь ему в деле учения. И умный товарищ это понимает.

Если ты что-то не понял в объяснении учителя или товарища, не стесняйся — сразу спрашивай, скажи, что тебе непонятно. Нельзя оставлять непонятым ни один из вопросов.

В классе решают задачу, и ты должен ее решать, решать самостоятельно, а не списывать запись решения с доски. Твое решение отличается от решения на доске — что же, выясни, в чем дело, не ошибся ли ты или ты нашел другой способ решения. Какой из них лучший, какой более красивый? Сравни их и, если твой способ хуже, не огорчайся, а постарайся понять и усвоить другой, более изящный способ решения.

Вообще, что бы ни делалось на уроке, ты должен быть активным участником, а не сторонним наблюдателем. Ведь все, что происходит на уроке математики,— *это твое дело, это дело для тебя!*

Галилей говорил, что «без упорного умственного труда никто не может далеко продвинуться в математике. Но каждый, кому знакома радость познания, кто увидел красоту математики, не будет жалеть затраченных усилий». А известный чешский просветитель и педагог Ян Амос Коменский (1592—1670) писал: «Считай несчастным тот день или тот час, в который ты не усвоил ничего нового и ничего не прибавил к своему образованию».

3. *Надо стараться «докапываться» до главного, до общих основ изучаемого материала.*

Важно не только понять сущность изучаемой теоремы, ее доказательство, а установить, почему она так доказывается, как додумались, догадались найти такое доказательство. Значит, надо каждый раз пытаться понять те основные правила, те общие способы действий, которые лежат в основе изучаемого материала.

Вот, например, выводим формулу корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Для этого мы в левой части уравнения выделяем квадрат двучлена, а предварительно, чтобы легче это было сделать, делим все члены уравнения на a. Надо подумать, а зачем выделяют квадрат двучлена. Почему мы это делаем? А мы это делаем для того, чтобы свести решение нового уравнения, квадратного, к ранее решенным уравнениям — линейным. Если мы это поймем, то, встретив какое-то новое уравнение, например уравнение третьей или четвертой степени, мы сразу начнем искать способ сведения его к уже известным — к квадратным или линейным уравнениям.

Или, например, изучаем теорему о диагоналях ромба, которые взаимно перпендикулярны. Надо задуматься, а является ли это свойство ромба характеристическим, т. е. таким, которое определяет ромб. Оказывается, что все зависит от того, как определяется ромб. Если ромб определяется как четырехугольник, все стороны которого равны, то перпендикулярность диагоналей не является характеристическим свойством, ибо имеются четырехугольники — не ромбы (трапеции и другие), у которых диагонали также взаимно перпендикулярны. Если же ромб определяется как параллелограмм, у которого две смежные стороны равны (значит, и все другие стороны равны), то это свойство уже является характеристическим, ибо из всех параллелограммов только ромб (и квадрат как частный случай ромба) обладает указанным свойством.

Вот такие размышления об изучаемых понятиях очень полезны. Полезно, решая какую-либо задачу, доказывая какую-либо теорему, всегда задумываться над вопросами: а как догадались найти такое решение, такое доказательство? Сумела бы я так же додуматься до этого? Какие общие эвристические правила нужно знать, чтобы найти это решение?

Иными словами, главной целью изучения математики должно быть для нас не просто запоминание тех или иных определений, теорем, формул и даже не просто владение ими, умение их использовать при решении задач (все это, конечно, нужно), а *усвоение и овладение идеями и методами математической науки.*

4. *Надо приучить себя к постоянному самоконтролю и самооценке своей учебной работы.*

Мы привыкли к тому, что нашу работу контролирует и оценивает учитель. Конечно, мы понимаем, что учитель это должен делать, ибо ведь ему надо знать, как мы усвоили учебный материал, что мы не поняли или плохо усвоили. Иначе учитель не сумеет правильно построить свою работу с нами. Он должен и оценивать нашу работу, наши успехи и недоработки с тем, чтобы выработать у нас правильное представление о себе, о результатах учения и чтобы поощрить хорошо работающих учеников и «пришпорить» нерадивых.

Но ведь мы учимся не для учителя, не для родителей, мы учимся для себя, и вся наша работа — *это работа для себя!* Поэтому контролировать и оценивать эту работу мы должны сами, как наиболее заинтересованные в ее результатах.

Самоконтроль и самооценку нужно проводить постоянно, по каждой проделанной работе. Решая задачу, доказывая теорему, выводя формулу, надо приучиться проверять (мысленно, про себя, а в нужных случаях и вслух) каждый свой шаг, оценивать его разумность, рациональность, т. е. проводить, как говорят, пооперационный самоконтроль и самооценку своих действий.

Это надо делать всегда, и тогда выработается очень полезная для жизни и труда привычка: обдумывать каждый свой шаг, оценивать его с точки зрения разумности и рациональности, необходимости, полезности.

Но такой текущий, повседневный самоконтроль и самооценка своей работы недостаточны. Надо приучить еще себя проводить итоговый самоконтроль и самооценку отдельных этапов учебной работы. Изучили какую-то тему, раздел и тут же надо проверить и оценить свою проделанную работу по этой теме, установить, с какими результатами ты пришел к концу изучения темы, что ты усвоил и как, а что не усвоил и почему.

— Для этого я,— заявила Нина,— использую уже два года такой способ. У меня есть специальная тетрадь для итогового самоконтроля и самооценки. Веду эту тетрадь так.

Когда мы начинаем изучать новую тему, я записываю в тетрадь ее название и затем графлю на три столбца. В первом — *знания и умения* — я записываю те знания и умения, которые мы изучаем по мере прохождения темы. Во втором — *результаты изучения* — я отмечаю знания и умения из первого столбца, которыми я считаю, что уже овладела, и ставлю себе оценку за них; пустая клетка в этом столбце означает, что соответствующим этой клетке знанием или умением я еще не овладела. Наконец, в третьем столбце — вопросы — я записываю те вопросы, на которые я самостоятельно не смогла найти ответ, то, что я не поняла, с тем чтобы с этими вопросами прийти на консультацию к учителю.

Мне такая форма итогового самоконтроля и самооценки очень помогает. Должно быть, можно придумать и более разумные формы для ведения самоконтроля и самооценки.

Вот те общие правила, которые, по-моему, надо выполнять, для того чтобы наша учебная работа принесла нам наибольшую пользу. Я надеюсь, что эти рекомендации и советы помогут нам разумно организовать свою учебу по математике.

После доклада Нины завязалась оживленная беседа, в которой приняла участие учительница.

Вопрос. Когда лучше выполнять домашние задания — в тот же день, когда их задали, или в день, предшествующий проверке их выполнения?

Ответ. Лучше выполнять домашнее задание в тот же день, когда его задали. Полезно также вечером, перед очередным уроком, на котором будет проверка выполнения домашнего задания, еще раз просмотреть решение задач, и особенно теоретический материал, заданный для повторения.

Вопрос. Как лучше заниматься дома повторением учебного материала: индивидуально или коллективно с двумя-тремя товарищами?

Ответ. Повторением текущего учебного материала лучше заниматься индивидуально, а вот повторением итоговым, когда повторяется материал целой темы или раздела, можно заниматься коллективно. Но в этом случае важно, чтобы не получилось так, что один все рассказывает, а остальные лишь молча слушают. Надо, чтобы все активно участвовали в работе по повторению пройденного.

Вопрос. Если я внимательно и активно слушал объяснения учителя, все понял и записал в тетрадь, то для чего нужно еще дома этот же материал повторять, да еще не один раз?

Ответ. Во-первых, понять — это еще не значит усвоить, овладеть. А ведь наша задача не просто понять учебный материал, а усвоить его, овладеть им, уметь им свободно пользоваться. Во-вторых, установлено, что из понятых на уроке объяснений усваивается в зависимости от содержания от 25 до 85% знаний. Даже если какие-то определения, формулировки теорем, правил, тем более их доказательство заучить, то через полчаса сохраняется в памяти примерно 60% этих знаний, а уже на следующий день не более 34%, через 3 дня — 25%. Поэтому, для того чтобы по-настоящему и надолго усвоить знания, овладеть ими, нужно неоднократное их повторение, многократное их применение. Но это повторение нельзя проводить в форме простого заучивания, а нужна кропотливая работа по разбору, по осмыслению, по применению этих знаний.

Второй доклад сделала Лариса.

ДОКЛАД 2. РЕЖИМ И ГИГИЕНА УЧЕБНОГО ТРУДА

В сутках, к сожалению, всего 24 ч, из них по крайней мере 8 ч мы спим, 6 учимся в школе, час, а то и два, тратим на дорогу в школу и обратно. Остается всего лишь 8—9 ч на остальные дела. А как их много, как много надо и хочется сделать: хочется почитать книгу, сделать физзарядку, посмотреть кинокартину, телевизор, сходить к товарищу, к подруге, поиграть... А домашние обязанности: уборка квартиры, помощь маме, младшим братьям и сестрам... Кроме того, многие из нас занимаются по вечерам еще в разных кружках, секциях, школах. Это тоже отнимает 3—4 ч, правда не каждый день. А домашние уроки, а подготовка к урокам...

Как видим, бюджет нашего времени весьма напряженный, и надо разумно его использовать. Главное — не терять зря ни одного часа, ибо время беспрерывно течет и вернуть потерянное время, увы невозможно.

Для этого надо четко и вполне определенно знать цели и задачи своих действий, своей работы, занятий на каждый час, не суетиться, не быть игрушкой обстоятельств и меняющихся ситуаций, не отвлекаться от начатой работы, а доводить ее до конца, упорно и настойчиво осуществлять намеченные цели. Вот что по этому поводу говорил известный немецкий писатель Лессинг (1729—1781): «Самый медлительный человек, если он только не теряет из виду цели, идет быстрее, чем тот, кто блуждает бесцельно».

Поэтому каждому из нас надо четко планировать свою работу на каждый день. Такое планирование следует оформить в виде режима дня и недельных расписаний — планов.

Думаю, что все знают, что такое р е ж и м д н я. Это четкое перечисление всех основных видов деятельности в течение дня с указанием времени начала и конца каждого действия: в котором часу просыпаться, сколько времени отвести на физическую зарядку, на завтрак, в котором часу начинаются и заканчиваются уроки в школе, когда надо приступить к выполнению домашних заданий и т. д.

Составить режим дня надо каждому самостоятельно, исходя из своих особенностей, учитывая домашние условия, свои интересы, привычки. Но, составив режим дня и убедившись в его разумности, его надо неукоснительно выполнять. Надо приучить себя к точному выполнению намеченного распорядка, как бы это ни было на первых порах трудно. Потом появится привычка к такому распорядку, и он уже не будет вызывать внутреннего сопротивления, желания его нарушать.

Однако режим дня лишь в общих чертах намечает характер работы в течение дня. Этого недостаточно для четкого планирования своего времени. Планирование содержания своей работы на каждый день можно оформить в виде недельных расписаний — планов.

Надо составлять два недельных расписания: одно *постоянное* на всю учебную четверть, в котором на каждый день недели указываются, какие уроки в этот день в школе, по каким учебным предметам в этот день выполняются домашние задания, в какие дни проводятся занятия в кружках, секциях, в какой день нужно выполнить значительные домашние дела и т. д.

Второе недельное расписание — *план-еженедельник,* составляется на каждую следующую неделю в конце текущей. В этом плане-еженедельнике указываем на каждый день недели выполнение каких-то новых возникших дел, общественных обязанностей, какую книгу собираемся прочитать, какой кинофильм и когда намечаем посмотреть. Туда же включаем те темы теле- и радиопередач, которые надо посмотреть и когда.

Конечно, этот еженедельник должен быть согласован с постоянным недельным расписанием и с режимом дня с тем, чтобы по возможности их не нарушать.

Имея режим дня, постоянное недельное расписание и еженедельник, мы четко знаем, что и когда нужно сделать, куда и зачем надо сходить. Конечно, жизнь может внести некоторые изменения в эти намеченные планы, могут возникнуть неожиданные ситуации, но, как правило, надо строго придерживаться намеченных планов и добиваться их безусловного выполнения.

Основное место и по времени и по значимости должна занимать у нас учебная работа, а она, как уже говорила Нина, есть умственный труд. Умственный же труд, как указывал великий русский педагог К. Д. Ушинский, «едва ли не самый тяжелый труд для человека. Мечтать легко и приятно, но думать трудно».

Поэтому необходимо рационализировать свой учебный труд, соблюдать правила гигиены умственного труда. Перечислим самые основные правила гигиены труда и рационализации своей работы.

1. Проверь, подходит ли тебе составленный режим дня, ведь у каждого свои условия, свои обстоятельства, свои особенности: у одних наибольшая работоспособность по утрам (жаворонки), а у других — вечером (совы). Кто ты — жаворонок или сова, по-

наблюдай за собой и в зависимости от этого построй свой режим дня. Посоветуйся с врачом, с родными, как лучше тебе организовать свой рабочий день.

Но, уже составив свой режим дня, строго его выполняй!

2. Надо чередовать виды деятельности в течение дня: после умственных занятий работа по дому или занятия спортом будут отдыхом от напряженной умственной работы.

3. Утренняя физическая зарядка, обливание или обтирание холодной водой должны быть в режиме каждого дня.

4. Надо упорядочить прием пищи. Некоторые из нас утром ограничиваются стаканом чая, а потом на переменах жуют бутерброды. Это вредная привычка. Завтрак перед школой должен быть основательным, достаточно плотным. Полезно помнить восточную мудрость: завтрак съешь сам, обед раздели с другом, ужин отдай врагу. Во всяком случае, ужин не должен быть обильным и плотным и обязательно не менее чем за 3 ч до сна.

На днях разговаривала на эту тему с одним учеником. Он сказал: «Я так привык. Понимаю, что это вредно, но ничего не могу сделать — привычка». Хочу ему и другим таким, как он, сказать, что это малодушие, что нет таких привычек, от которых нельзя избавиться, если они вредные. Герой гражданской войны, революционер М. В. Фрунзе (1885—1925) говорил: «Нужно совершенствоваться. Любой характер можно изменить. Терпение, способности, даже физическую силу — все можно выработать в себе, если по-настоящему захотеть, если не давать себе поблажки».

5. Надо приучить себя заранее готовиться к той или иной работе, заранее продумывать ее, планировать. Тогда легче и успешнее ее сделаешь. Это относится и к урокам математики. Зная тему предстоящего урока, полезно прочитать по учебнику дома перед уроками соответствующий параграф или пункт. Тогда будешь легче и основательней воспринимать объяснения учителя.

6. Очень важно организовать место для своей работы. В классе — разумно расположить на своем столе (парте) все нужные принадлежности, тетради. Дома — иметь постоянное, хорошо оборудованное место для работы: столик, полку для книг и учебников, для тетрадей, особое место для письменных и чертежных инструментов. Желательно иметь настольную лампу, а если ее нет, то так расположить свое рабочее место, чтобы свет падал с левой стороны.

7. Надо приучить себя правильно сидеть за рабочим столом: прямо, не изгибаясь в сторону, не подвертывая под себя ногу или еще как-то, чтобы не искривить позвоночник, ведь он у нас еще не окреп.

8. Во время длительной работы надо делать небольшие перерывы для отдыха, примерно через каждые 45 мин.

9. Работать надо равномерно, не спеша, но и не медля. При неудачах не горячиться, не нервничать, а спокойно и тщательно проверить проделанную работу, поискать причины неудачи.

Если же ничего не найдешь, лучше отложить на время эту работу и взяться за нее вторично через некоторое время. Если и теперь неудача, не можешь, например, найти способ решения какой-то задачи, можно, конечно, обратиться за консультацией к товарищам, к учителю. Но при этом постарайся понять, в чем твое упущение, почему ты сам не сумел найти правильное решение. Однако, если позволяет время, полезнее возвращаться к трудной, неподдающейся задаче не один или два раза, а многократно, чтобы в конце концов самому, без чужой помощи, подсказки, найти ее решение.

10. Вредно во время работы кушать. Если появилась жажда, можно выпить немного воды, а вот кушать погоди, пока не кончишь работу.

11. Не пытайся делать одновременно два дела: скажем, учить уроки и смотреть телевизор или слушать музыку. Это вредно для здоровья и для самой работы. Иные, выполняя домашние задания, включают на полную громкость магнитофон и под музыку джаза решают задачи. Толку от такой работы в музыкальном сопровождении мало. Если уж очень хочется музыки, то во время работы она должна быть тихой и спокойной. Но лучше приучить себя работать в полной тишине, работать сосредоточенно, отдаваясь целиком этой работе.

12. Полезно время от времени анализировать свою работу, ее организацию: все ли я делаю достаточно умело и рационально, что мне удается и что не удается, почему, нельзя ли что-то изменить в режиме дня, в способах работы или в ее организации, чтобы сделать ее более продуктивной.

Такой самоанализ поможет в лучшей организации самостоятельной работы, в повышении ее эффективности.

Полезно помнить советы Л. Н. Толстого (1828—1910) и следовать им: «Что назначено непременно исполнить, то исполняй, несмотря ни на что... Что исполняешь, исполняй хорошо... Никогда не справляйся в книге, ежели что-нибудь забыл, а старайся сам припомнить... Заставь постоянно ум твой действовать со всею ему возможною силою».

Следующий доклад сделали Инна и Сергей.

ДОКЛАД 3. КАК ЧИТАТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КНИГИ

Учиться нам помогает не только учитель, но и книги, в первую очередь учебники.

Учебники по математике содержат всю информацию о математических знаниях, предусмотренных программой нашего обучения, они помогают в организации нашей учебной работы. Вопросы, задачи, разного рода практические задания, имеющиеся в учебниках, предназначены для того, чтобы в результате их выполнения более глубоко овладеть изучаемыми знаниями, нужными умениями и навыками. Учебники помогают нам в повторении, закреплении, систематизации ранее полученных знаний. Учебники служат и своеобразным справочником, и в случае каких-либо затруднений, в случае, когда мы что-то забыли или нетвердо помним, мы можем взять учебник и в нем найти нужные нам сведения, получить необходимую справку.

Как же устроены учебники по математике?

Каждый учебник разбит на разделы — главы, главы в свою очередь разбиты на параграфы, а те — на пункты. Каждая глава (раздел, тема), параграф, пункт имеют определенное название, которое отражает главное содержание этой главы (параграфа, пункта). Вот, например, первая глава учебника по алгебре для VII класса названа «Рациональные дроби», § 1 этой главы — «Преобразование рациональных выражений», а пункт 1 этого параграфа — «Рациональные выражения».

Названия глав, параграфов и пунктов имеются в *оглавлении,* которое помещается в конце учебника. По этому оглавлению можно узнать, на какой странице начинается та или иная глава, параграф, пункт.

Поэтому, когда нам нужно, например, повторить решение линейных неравенств с одной переменной, то ищем в оглавлении соответствующий пункт. Очевидно, что его надо искать в главе II «Неравенства». В этой главе находим § 6 «Неравенства с одной переменной», в этом параграфе находим пункт 17 «Решение линейных неравенств с одной переменной». Напротив него читаем число 68, это значит, что данный пункт начинается с 68-й страницы.

Если же нужно навести справку, например, об определении линейного неравенства с одной переменной, то можно воспользоваться *предметным указателем,* который имеется в большинстве учебников. Родовым понятием для линейного неравенства является понятие «неравенство», поэтому ищем в предметном указателе, который также помещается в конце книги, но до оглавления, слово «неравенство». Там и находим понятие «неравенство линейное с одной переменной», а рядом число 70, которое означает, что определение этого понятия помещено в учебнике на странице 70.

Заметьте, что ниже имеется такая запись: «— нестрогое 60». Черта, стоящая перед словом «нестрогое», означает, что родовым понятием является вышестоящее слово, т. е. «неравенство». Следовательно, данную запись надо читать так: «Неравенство нестрогое 60», а это означает, что определение нестрогого неравенства имеется на странице 60 учебника.

Примерно так же устроены и справочники по математике.

Кроме учебников и справочников, полезно читать научно-популярную литературу. Много интересного для себя вы найдете в журнале «Квант». Вот еще некоторые книги, которые можно рекомендовать учащимся:

1. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад.— М., 1975.
2. Балк М. Б., Балк Г. Д. Математика после уроков.— М., 1971.
3. Белл Э. Т. Творцы математики. Предшественники современной математики.— М., 1979.
4. Болтянский В. Г., Левитас Г. Г. Математика атакует родителей.— М., 1976.
5. Башмаков М. И. Уравнения и неравенства.— М., 1971.
6. Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Прямые и кривые.— М., 1970.
7. Гарднер Мартин. Математические головоломки и развлечения.— М., 1971.
8. Гарднер Мартин. Математические новеллы.— М., 1974.
9. Гарднер Мартин. Математические чудеса и тайны.— М., 1978.
10. Гнеденко Б. В. Математика в современном мире.— М., 1980.
11. Гусев В. А., Орлов А. И., Розенталь А. Л. Внеклассная работа по математике в 6—8 классах.— М., 1977.
12. Глейзер Г. И. История математики в школе. IV—VI классы.— М., 1981.
13. Глейзер Г. И. История математики в школе. VII—VIII классы.— М., 1982.
14. Глейзер Г. И. История математики в школе. IX—X классы.— М., 1983.
15. Депман И. Я. Мир чисел.— Л., 1982.
16. Дышинский Е. А. Игротека математического кружка.— М., 1972.
17. Гуров С. П. и др. П. Л. Чебышев.— М., 1979.
18. Заочные математические олимпиады /Под ред. Н. Б. Васильева и др.— М., 1981.
19. Кордемский Б. А. Увлечь школьников математикой.— М., 1981.
20. Колягин Ю. М., Оганесян В. А. Учись решать задачи.—М. 1980.
21. Дьюдени Генри Э. Кентерберийские головоломки.— М., 1979.
22. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л. Математические соревнования. Арифметика и алгебра.— М., 1970.
23. Лоповок Л. М. Математика на досуге.— М., 1981.
24. Лойд Сэм. Математическая мозаика.— М., 1980.
25. Перельман Я. И. Занимательная алгебра.— М., 1970.
26. Понтрягин Л. С. Метод координат.— М., 1977.
27. Постников. Метод Ферма.— М., 1978.
28. Фаермарк Д. С. Задача пришла с картины.— М., 1974.
29. Фридман Л. М. и др. Как научиться решать задачи.— М., 1979.
30. Эббот Э. Э. Флатландия. Бюргер Д. Сферландия.— М., 1976.

Приступая к чтению книги, надо каждый раз выбирать способ чтения. Ведь можно лишь *просматривать* нужный материал (раздел, главу), чтобы восстановить в памяти ранее известное. Можно знакомиться с содержанием книги путем внимательного *чтения*; можно использовать книгу для получения каких-либо справок, условий задач, можно, наконец, не просто читать книгу, а *изучать* ее. Н. К. Крупская указывала: «Одно из орудий для получения знаний, но орудие очень существенное, это умение пользоваться книгой. И тут надо знать, как надо читать, как выбирать материал, как с ним справиться, как овладеть им».

В каких случаях нам приходится пользоваться учебниками и другими математическими книгами? Вот основные случаи.

1. Нужно найти в учебнике задачи для самостоятельного решения. В этом случае по оглавлению находим, на какой странице начинается указанный параграф или пункт, а затем в нем находим номер указанной задачи. Как правило, условие задачи, если она текстовая, можно не переписывать в тетрадь, а лишь соста-

вить краткую запись задачи (модель задачи). Если возникло затруднение в решении, то надо по учебнику внимательно посмотреть предшествующий этой задаче материал, особенно образцы решения задач. Это обычно помогает в поисках решения данной задачи. После решения можно сверить полученный ответ с ответом в учебнике. Ответы помещены в конце учебника.

2. Нужно повторить учебный материал (определение, теорему, вывод формулы и т. д.), изученный на уроке. В этом случае можно поступить по-разному, в зависимости от степени усвоения этого материала на уроке. Если все, что было изучено на уроке, кажется вполне понятным, то тогда, прочитав соответствующее место в учебнике, закрой книгу и попытайся самостоятельно сформулировать определение, записать его, пользуясь математическими знаками, сформулировать и доказать теорему, вывести формулу, т. е. то, что было пройдено на уроке и что только что прочел в учебнике. Если затруднений не встретил и сверка твоих записей с учебником показала, что все правильно, то можно на этом работу закончить.

Если же ты обнаружил, что не можешь правильно воспроизвести содержание прочитанного, то надо не просто прочитать соответствующее место в книге, а изучить его как бы заново.

3. Надо самостоятельно изучить какой-то материал (пункт) по учебнику. Это изучение можно провести по-разному. Можно, читая по частям указанный пункт, одновременно записывать содержание прочитанного в тетрадь, используя математические знаки и символы.

Можно иначе: сначала прочитать весь пункт, не делая никаких записей, затем, если все понятно, закрыть учебник и записать в тетрадь основное содержание математическими знаками и символами. В любом случае надо затем еще раз восстановить устно или письменно содержание изучаемого материала, не заглядывая в книгу. Если, например, задано изучить по учебнику теорему о внешнем угле треугольника, то находим эту теорему в учебнике. Читаем:

«Теорема 4.5. *Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним*».

Вспоминаем, что такое «внешний угол треугольника». Про себя повторяем: «Внешний угол треугольника — это угол, смежный с внутренним углом треугольника, при этой вершине».

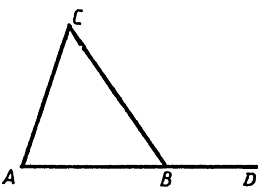


Рис. 16

После этого строим в тетради произвольный треугольник ABC и внешний угол при какой-либо вершине, например B — угол CBD (рис. 16). Внутренние углы треугольника, не смежные с этим внешним углом,— будут углы A и C. После этого записываем в тетрадь:

Дано: $\triangle ABC$; $\angle CBD$ — внешний угол $\triangle ABC$.

Доказать: $\angle CBD = \angle A + \angle C$.

Читаем дальше в учебнике:

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник. По теореме 4.4. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Останавливаемся и вспоминаем теорему 4.4.

Ее формулировка: «*Сумма углов треугольника равна 180°*».

Читаем дальше: «Отсюда следует, что $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$. В правой части этого равенства стоит градусная мера внешнего угла треугольника при вершине C. Теорема доказана».

Смотрим на свой чертеж и запись теоремы в тетради. У нас взят внешний угол не при вершине C, как в учебнике, а при вершине B. Значит, нам надо будет иначе преобразовывать равенство о сумме углов треугольника. Поэтому пишем в тетради:

Доказательство. По теореме о сумме углов треугольника имеем: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Отсюда: $\angle A + \angle C = 180° - \angle B = \angle CBD$, что и требуется доказать. После этого, закрыв учебник, по записи в тетради вслух или про себя читаем полностью содержание теоремы и ее доказательство.

Другой пример. Задано изучить по учебнику алгебры пункт «Основное свойство степеней».

В этом случае можно применить второй способ. Читаем весь пункт по учебнику:

31. Основное свойство степеней.

Произведение двух степеней с одинаковыми основаниями всегда можно представить в виде степени с тем же основанием.

Представим, например, произведение x^8x^6 в виде степени с основанием x.

По определению степени x^8 есть произведение восьми множителей, каждый из которых равен x, x^6 — произведение шести таких же множителей. Следовательно, x^8x^6 равно произведению $8+6$ множителей, каждый из которых равен x, т. е. $x^8x^6 = x^{8+6} = x^{14}$.

Вообще если основание степеней a — произвольное число, а m и n — любые натуральные числа, то истинно равенство:

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Это равенство выражает основное свойство степени:

Произведение двух степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей этих степеней.

Можно показать, что это свойство имеет место и в случае, когда число множителей больше двух.

Например, в случае трех множителей имеем:

$$a^m a^n a^k = (a^m a^n) a^k = a^{m+n} a^k = a^{m+n+k}.$$

При выполнении преобразований удобно пользоваться правилом: *при умножении степеней с одинаковыми основаниями* *основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают.*

Прочитав не спеша, обдумывая каждый абзац, закрываем после этого учебник и записываем в тетради:

Основное свойство степени. $a^m a^n = a^{m+n}$.

Произведение степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей этих степеней.

Правило. *Чтобы перемножить степени с одинаковыми основаниями, надо основание степени оставить прежним, а показатели степеней сложить.* $a^3a^5a^4 = a^{3+5+4} = a^{12}$.

После этого, закрыв тетрадь, вслух или про себя повторяем формулировку основного свойства степени и соответствующее правило. Если при этом что-то забыли, не можем вспомнить, надо еще раз прочитать по своей записи соответствующее место и повторить его еще раз.

4. Нужно по учебнику повторить целый раздел курса. Это приходится делать при подготовке к заключительным урокам по теме или при подготовке к экзаменам. В этом случае следует найти в учебнике нужный материал, прочитать сначала весь материал, ничего не записывая, затем, читая вторично, составить конспект или схему прочитанного.

Конспект представляет собой краткую запись основного, наиболее существенного содержания прочитанного с использованием математических знаков и символов. *Схема* — это тот же конспект, но расположенный так, чтобы наглядно показать связи и отношения между отдельными частями содержания (понятиями, определениями, теоремами и т. д.). Схема — это сокращенный конспект, из которого отбросили почти весь текстовой материал.

5. Если нужно подготовить доклад, то работа строится следующим образом:

1) подбор нужной литературы;

2) изучение литературы и конспектирование тех разделов, которые непосредственно связаны с темой доклада;

3) отбор наиболее существенного и систематизация всей нужной информации;

4) составление плана доклада;

5) формулирование тезисов доклада в соответствии с планом;

6) подбор иллюстративного материала: чертежей, графиков, примеров, задач и т. д.

Более подробно, как пользоваться книгами, учебниками, можно прочитать в следующих книгах:

1) Николаева Л. А. Учись быть читателем.— М., 1982.
2) Гецов Г. Рациональные приемы работы с книгой — М., 1975.
3) Поварнин С. Как читать книги.— М., 1978.
4) Попов Г. Техника личной работы.
5) Учись работать с книгой /Сост. Т. К. Крук.

Последний доклад сделал Саша.

Д О К Л А Д 4. **КАК ВЕСТИ ТЕТРАДИ ПО МАТЕМАТИКЕ**

Овладеть математикой, лишь слушая объяснения учителя или читая учебник, невозможно. Конечно, слушать объяснения учителя нужно внимательно, следить за его записями на доске. Учебник следует читать внимательно, не торопясь. Но этого совершенно недостаточно, чтобы усвоить материал. Нужно не только слушать, видеть, читать, но и воспроизводить услышанное, увиденное, прочитанное в своих тетрадях по математике. Кроме того, в тетрадях ведется запись, фиксация самостоятельной работы по решению задач, по выполнению других заданий.

Поэтому от того, как ведутся записи в тетрадях, зависит многое. Правильные и аккуратные записи в тетрадях важны еще и потому, что математика имеет свой язык, и овладеть математикой — это значит, в частности, овладеть этим языком. А для овладения каким-либо языком нужна большая практика в письме и чтении на этом языке. Запись всего изучаемого материала, решения задач в тетрадях и дает такую практику.

Как вести записи классных работ в тетрадях? Приступая к изучению темы, учитель сообщает ее название. Его надо записать в тетрадь, например, так:

Т е м а. **Одночлены и многочлены.**

Название темы выделить подчеркиванием цветным карандашом. На каждом уроке учитель сообщает тему урока. Ее тоже нужно записать в тетрадь, выделив подчеркиванием.

В тетрадь записываются те определения, правила и другие формулировки, которые диктует учитель. Запись доказательства теорем, вывода, формул, решения задач, которые появляются на доске, нужно аккуратно переписывать в свою тетрадь. Если решение задач выполняется фронтально или самостоятельно, то в этом случае следует вести запись самостоятельно. Лишь закончив решение, нужно сверить свое решение с тем, которое выполнено на доске. Если обнаруживается существенное расхождение, то надо выяснить, нет ли ошибки в решении, и если есть, то исправить эти ошибки или решить задачу заново, зачеркнув первоначальное решение. Не надо бояться зачеркивания неверных решений: ведь на ошибках мы тоже учимся.

Записи лучше всего вести сразу набело, без черновиков. Все вспомогательные вычисления делаются тут же в тетрадях, можно их отделить от основных записей чертой. Записи ведутся чернилами, а вот чертежи можно выполнять карандашом с помощью чертежных инструментов: линейки, циркуля, транспортира, угольника, которые всегда надо иметь на уроках математики.

Записи в тетрадях следует выполнять аккуратно, выделяя наиболее существенное, главное (правила, теоремы и т. д.), широко используя математическую символику.

Чтобы лучше усвоить эту символику, правильное написание математических терминов и их значений, полезно вести специальный *словарь математических терминов и символов*, для чего иметь особую тетрадь или блокнот. В этом словаре надо записывать все вновь появляющиеся математические термины и символы и их определения.

Как вести записи домашних работ?

Если домашнее задание состоит в повторении текущего теоретического материала, то нужно не только прочитать этот материал в учебнике, но и сделать краткую запись прочитанного: формулировки повторяемых определений, правил, теорем и их доказательства, пользуясь математической символикой, сделать нужные чертежи. При этом лучше избегать обозначений учебника. Такие изменения помогают лучше разобраться в сущности теорем и их доказательств. Если домашнее задание состоит в повторении целой темы или раздела, то полезно, прочитав соответствующий материал и свои записи в классной тетради, составить схему содержания этой темы. Об этом подробно рассказывали Инна и Сергей.

Решение задач оформляют примерно так: краткая запись задачи, ее решение с использованием символики, ответ задачи, если нужно, проверка решения. Примеры записей решения задач.

1 пример. **Задача.** Разложить на множители $a^2-16+8b-b^2$.

Решение. $a^2-16+8b-b^2=a^2-(16-8b+b^2)=$ $=a^2-(4-b)^2=(a+(4-b))(a-(4-b))=(a-b+4)(a+b-4)$.

2 пример. **Задача.** «Два подъемных крана, из которых второй начинает работу на 5 ч позже первого, разгрузили баржу за 11 ч. За сколько часов может разгрузить баржу каждый кран, если первому крану требуется для этого на 10% больше времени, чем второму?»

Решение.

Возможные случаи	Производительность крана (в 1 ч)	Время работы (в часах)	Объем работы (баржа)
1-й кран	a	$y=x+10\%x$	1
2-й кран	b	x	1
Вместе	$\begin{cases} a \\ b \end{cases}$	11 $11-5=6$	$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} 1$

y составляет 110% от x; $y=\frac{11}{10}x$;

$a=1:\frac{11}{10}x=\frac{10}{11x}$; $b=\frac{1}{x}$; $11\cdot\frac{10}{11x}+6\cdot\frac{1}{x}=1$;

$\frac{10}{x}+\frac{6}{x}=1$; $\frac{16}{x}=1$; $x=16$, $y=16\cdot\frac{11}{10}=17\frac{3}{5}$.

Ответ. Первый кран за 17 ч 36 мин, второй — за 16 ч.

3 пример. **Задача.** «Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма».

Решение. Дано: $AK=KB$; $BL=LC$; $CM=DM$; $DN=NA$.

Доказать: $KLMN$ — параллелограмм (рис. 17).

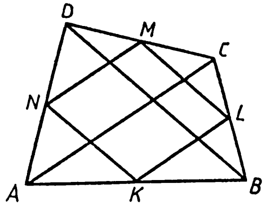


Рис. 17

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} KL \text{ — средняя линия } \triangle ABC \Rightarrow KL \parallel AC \\ MN \text{ — средняя линия } \triangle ACD \Rightarrow MN \parallel AC \end{array}\right\} \Rightarrow KL \parallel MN$$

$$\left.\begin{array}{l} LM \text{ — средняя линия } \triangle BCD \Rightarrow ML \parallel BD \\ KN \text{ — средняя линия } \triangle ABD \Rightarrow KN \parallel BD \end{array}\right\} \Rightarrow KN \parallel ML$$

Следовательно, $KLMN$ — параллелограмм.

Примерно так же надо оформить решение задач в контрольных работах.

Все тетради систематически проверяют учитель или по его указанию ученики-контролеры. После такой проверки надо посмотреть, какие сделаны замечания. Если какая-то запись подчеркнута как ошибочная или подчеркнуты ошибки в решении задачи, то нужно обязательно неверную запись переписать верно, а ошибки в решении задачи исправить.

Главное при этом — понять, в чем состояла твоя ошибка, чем она была вызвана: собственной небрежностью, невнимательностью или незнанием. В последнем случае необходимо восстановить этот пробел в знаниях.

Вопросы по докладу.

Вопрос. Нужно ли переделывать решение задачи, если оно верное, но отличается от решения, которое показал учитель?

Ответ. Не нужно, но если предложено решение более рациональное, то его полезно записать в тетрадь.

Вопрос. Как переносить записи вычислений или преобразований, если они не поместились в одной строке?

Ответ. Перенос с одной строки на другую разрешается производить или на знаке равенства или на знаке действия, при этом соответствующий знак (равенства или действия) повторяется в начале следующей строки. (На знаке деления перенос производить нельзя.)

Вопрос. Можно ли формулировки определений, правил, теорем, формул слегка закрашивать каким-либо цветом?

Ответ. Можно, но тогда нужно всегда определения закрашивать одним цветом, теоремы — другим, правила — третьим. Можно формулировки обводить рамкой либо отмечать линией.

Вопрос. Нужно ли хранить исписанные тетради?

Ответ. Обязательно. Ведь по этим тетрадям будет легко произвести повторение пройденного материала. Желательно все тетради за год хранить по крайней мере до окончания школы.

РАЗВИВАЙТЕ СВОИ УМЕНИЯ И КАЧЕСТВА УМА

Прошло несколько месяцев после обсуждения докладов ребят. Занятия по математике шли хорошо, весело, большинство учащихся класса очень старались, работали с огоньком, с интересом, увлекались решением задач. Казалось, что особых причин для беспокойства нет. Однако Мария Львовна была не совсем довольна положением дел в классе. Ее беспокоило, что многие ученики успевали ниже своих возможностей. Это были ребята, активные в общественной жизни класса, хорошие товарищи, а вот по математике, да не только по ней, *перебивались* с тройки на четверку, а несколько человек еле *тянули* на тройку. Нельзя сказать, что эти ученики совсем ничего не делали, но они должно быть уже потеряли всякую веру в успех своей работы и на все уговоры, что они должны и могут повысить свою успеваемость по математике, неизменно отвечали: «У нас нет способностей к математике».

Когда-то и Сергей так думал и говорил, но у него после всех бесед Марии Львовны, после докладов резко изменилось отношение к математике, появилась вера в свои силы, и успехи не заставили себя ждать: сейчас он уже был в числе хороших учеников класса. Изменилось отношение к математике и у Саши, который прежде относился к ней весьма прохладно, считая, что она ему не очень нужна. Беседы, обсуждения, прошедшие в классе дискуссии вызвали у него собственные раздумья, и все это не прошло для него даром: он стал с охотой, с интересом заниматься математикой, стараясь проникнуть в сущность ее методов, говоря, что овладение математикой поможет ему в его будущей работе по истории (он уже твердо решил посвятить себя истории).

А вот несколько других ребят и девочек так и остались в своем убеждении, что математика им не очень нужна, а главное, мол, нет у них к ней никаких способностей.

Все это и беспокоило Марию Львовну.

Как-то после уроков, когда Мария Львовна проверяла тетради учеников, а Нина расставляла по полкам книги и модели, Мария Львовна обратилась к ней.

— Как ты думаешь, Нина, почему у нас некоторые ребята учатся еле-еле? Что им мешает?

— А может быть, в самом деле, у них нет способностей к математике, ведь не все могут быть математиками.

— Нет, Нина, ты не права... Ведь я говорю не о том, чтобы эти ребята стали математиками, а о том, чтобы они хорошо учились по математике. А для этого не нужно обладать какими-то особыми способностями... Если человек хочет научиться математике и имеет нормальные качества ума, то он вполне может успешно овладеть школьным курсом математики.

— Так в том-то и дело, Мария Львовна, что эти ребята как раз и не имеют этих нормальных качеств. Вот возьмите Катю. Хорошая девочка, но ведь она не может хотя бы несколько минут думать о чем-то одном: мысли у нее скачут. Начинает, например, говорить об одном, тут же перескакивает на другое, потом вдруг вспоминает первое, а затем говорит еще о чем-то третьем... Или Света. Она такая рассеянная, все время что-то теряет, забывает, какое сегодня число и день, что ей велела сделать мама... А Павел... Ведь ему, чтобы что-то сообразить, надо неделю думать...

— Да, ты права, Нина, эти ребята, возможно, плохо подготовлены к школе. А сейчас они не работают над собой, не пытаются развить свои умения, качества своего ума, исправить свой характер.

— А разве это можно?

— Почему же нельзя? Вспомни слова Михаила Васильевича Фрунзе, которые привела в своем докладе Лариса. Он говорил, что любой характер можно изменить, нужна лишь большая работа над собой, не надо давать себе поблажки. А уж умения, качества ума всегда можно развить. Нет, Нина, вы еще в таком возрасте, когда нетрудно и характер свой изменить, и умения, и даже способности свои развить... Надо только крепко захотеть и много над собой поработать.

— Так, может быть, Мария Львовна, вы бы занялись со всеми нами над развитием нужных умений и способностей. Ведь у всех у нас, а не только у этих ребят, которые хромают по математике, они недостаточно развиты. Вот и я, хотя учусь по всем предметам вроде неплохо, а память у меня никудышная: с большим трудом могу заучить простенькое стихотворение. Уверена, что все наши ученики с охотой и удовольствием занялись бы развитием своего ума, своих умений.

— Да, такие занятия хорошо бы организовать, да вот только такие занятия должен проводить специалист-психолог.

— Ой, Мария Львовна. Я знаю такого специалиста. Моя тетя Таня работает в институте психологии, и она, кажется, занимается там развитием способностей дошколят. Но, может, она и с нами позанимается.

— Вот хорошо, Нина. Пригласи тетю в школу. Я буду рада, если она согласится нам помочь.

Татьяна Александровна — психолог согласилась провести несколько занятий с учениками. Все ученики изъявили желание посещать эти занятия, хотя многие не очень верили в их успех.

ЗАНЯТИЕ 1. УЧИТЕСЬ ВИДЕТЬ, НАБЛЮДАТЬ

Чтобы успешно учиться математике, прочно ею овладеть, надо, конечно, обладать некоторыми общими умениями и качествами. Нужно уметь видеть объекты во всем многообразии их свойств и отношений, уметь сравнивать эти объекты, находить черты сходства и различий, уметь действовать в уме, представлять мысленно любые объекты и видеть в уме все их особенности и изменения при тех или иных преобразованиях, т. е. иметь хорошо развитое воображение. Конечно, надо обладать также достаточной волей и вниманием, хорошей памятью, сообразительностью.

Но разве всеми этими умениями и качествами не нужно обладать, чтобы успешно учиться по другим предметам, чтобы в будущем хорошо трудиться, работать на производстве, в колхозе?.. Так что в этом отношении математика ничем особенным не отличается от других предметов. Кроме того, разве каждый из вас не хочет, чтобы у него была хорошая память, развитое воображение, внимание, крепкая воля, сообразительность, умение наблюдать и обобщать и т. д. независимо от того, нужно ли все это для изучения математики или не нужно? Не сомневаюсь, что все вы хотите этого. Так давайте будем развивать свои умения, качества своего ума!

Учтите очень важное положение: *все названные мною умения и качества нужны для изучения математики, без них оно не может быть успешным, но сами умения и качества развиваются и крепнут в процессе упорного, плодотворного изучения математики.*

Тут диалектика: для того чтобы учиться, нужны умения и особые качества ума, а эти умения и качества развиваются, формируются в процессе учения.

Если вы внимательно и активно будете участвовать (а не только присутствовать) на наших занятиях, если вы проделаете все упражнения, все задания, которые я вам буду задавать, то уверена, что вы сами почувствуете пользу наших занятий для себя.

Итак, начнем первое занятие. Будем учиться видеть, наблюдать. Ведь можно смотреть и мало видеть, а надо научиться не просто смотреть,— это вы умеете,— а видеть встречающиеся вам объекты во всем их многообразии свойств и отношений.

Вы уже знаете, что каждый математический объект имеет очень много различных свойств. Но при определении этих объектов указывают лишь самые существенные свойства, необходимые и достаточные для их распознания.

Возьмем такой пример. Средняя линия треугольника определяется как отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Рассмотрим треугольник ABC и среднюю линию EF в нем (рис. 18). Какими свойствами обладает EF?

— EF — отрезок... средняя линия треугольника ABC... параллельна AB...EF равна половине стороны AB...

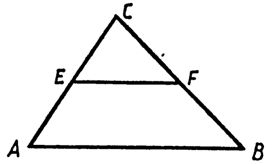


Рис. 18

— Все это верно, это все вытекает из определения средней линии и из известного свойства. А еще какие свойства EF вы видите?.. Больше не видите?

А ведь EF обладает еще многими другими свойствами. Вот некоторые из них: EF — сторона треугольника EFC и она меньшее основание трапеции $ABEF$; EF — сторона углов EFC, EFB, FEA и CEF. EF делит треугольник на две части, притом площадь верхней части составляет одну четверть площади всего треугольника, и т. д.

Как видите, этот простой математический объект, кроме свойств, указанных в определении и теоремах, обладает еще многими другими свойствами. Надо учиться их замечать, видеть, ибо без этого, без такого многообразного взгляда на математические объекты, вы не сумеете решать математические задачи, доказывать теоремы.

Возьмем теперь число 144. Какими свойствами оно обладает?

— Это натуральное число... Оно четное, делится на 3... 144 — это квадрат 12...

— Верно. Но это число обладает еще многими другими свойствами. Оно делится не только на 2 и на 3, а на многие другие числа. Вот все делители числа 144: 1 и 144; 2 и 72; 3 и 48; 4 и 36; 6 и 24; 8 и 18; 12 — всего 13 делителей.

Это число обладает еще и тем свойством, что оно делится на сумму своих цифр 144: $(1+4+4)=16$, а 16 есть произведение этих цифр: $16=1\cdot4\cdot4$. Значит, оно делится и на произведение своих цифр. Если поменять местами первую и последнюю цифры этого числа, то получим 441, а это есть квадрат числа 21, получаемого переменой мест цифр числа 12.

Обычно в математике объекты рассматривают относительно друг друга, так же как в жизни. Отрезок EF становится средней линией, если он проведен соответствующим образом в треугольнике, а сам по себе он просто отрезок. Посмотрите на чертеж (рис. 19). На этом чертеже изображена прямая AB, перпендикулярная к прямой AC, и BC — наклонная к этой же прямой. Но та же прямая AB является наклонной к прямой BC, а сама AC перпендикулярна AB и наклонна к BC. Таким образом, одна и та же прямая может быть перпендикулярной к одной прямой и наклонной к другой.

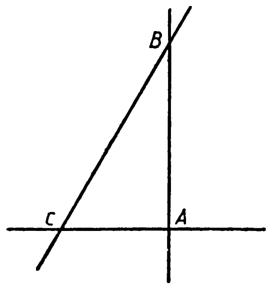


Рис. 19

Если объект сложный, то, рассматривая его, изучая, надо уметь все правильно схватить, увидеть все его особенности. Для этого сам процесс рассмотрения надо производить в определенном порядке, а не хаотично. А то может произойти то, что произошло с мальчиком Лемеле в стихотворении Льва Квитко:

Мама сказала:
— Ты мне услужи,
Сестру уложи,
Дрова наколоть
Не забудь, мой сынок,
Поймай петуха
И запри на замок.
Сестренка, тарелки,
Петух и дрова...
У Лемеле только
Одна голова! —

Схватил он сестренку
И запер в сарай.
Сказал он сестренке:
— Ты здесь поиграй!
Дрова он усердно
Помыл кипятком,
Четыре тарелки
Разбил молотком.
Но долго пришлось
С петухом воевать:
Ему не хотелось
Ложиться в кровать.

Посмотрите на чертеж (рис. 20). Сколько на нем изображено треугольников? Рассматривая внимательно чертеж слева направо, находим всего 15 треугольников: *AOE*, *OEH*, *OEP*, *EHP*, *EBL*, *EMB*, *EKM*, *EKL*, *KFR*, *KML*, *KBL*, *RMQ*, *RCB*, *QLC*, *PBN*.

А сколько там изображено различных четырехугольников? Находим 5 прямоугольников: *AEFD*, *ABCD*, *EBCF*, *EBLK*, *FCLK*; один параллелограмм —*ONBE*; 8 трапеций: *AOFD*, *OHMK*, *HPBM*, *HNBM*, *KRQL*, *EBCQ*, *KRCL*, *KFQL*; 2 неправильных четырехугольника — *AOHE* и *MBCQ* и, наконец, один пятиугольник *OHMRF*.

А еще там имеется окружность центра *O* с диаметром *EF*, с двумя другими радиусами, с несколькими секторами, сегментами. Как видим, какое богатство различных фигур мы обнаруживаем при внимательном рассмотрении этого незамысловатого чертежа.

Еще пример. Дано алгебраическое выражение:

$$x^3+2x^2y+2xy^2+y^3.$$

Что вы о нем можете сказать?

— Это многочлен... Третьей степени... В нем четыре члена... Его можно разложить на множители: $x^3+2x^2y+2xy^2+y^3=(x^3+y^3)+(2x^2y+2xy^2)=(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

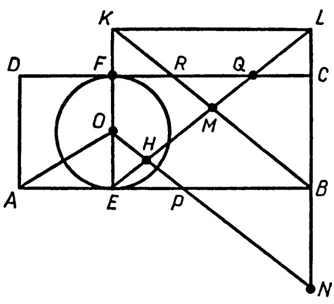


Рис. 20

— Все верно, молодцы. Но вот самое простейшее, но очень важное свойство вы не заметили. Ведь этот многочлен не меняется при замене x на y и обратно y на x. Действительно, получим: $y^3+2y^2x+2yx^2+x^3$, т. е. тот же многочлен, но его члены написаны в обратном порядке. Еще одно важное свойство вы не заметили: коэффициенты членов, одинаково удаленных от начала и конца многочлена, равны: 1, 2, 2, 1.

Наконец, что вы можете сказать о функции, график которой изображен на чертеже (рис. 21)?

— Это парабола...

— Да, это парабола. Но я спрашиваю не о кривой, а о свойствах функции, графиком которой является данная парабола.

— Это график квадратного трехчлена... Эта функция при $x=0$ и при $x=2$ обращается в нуль...

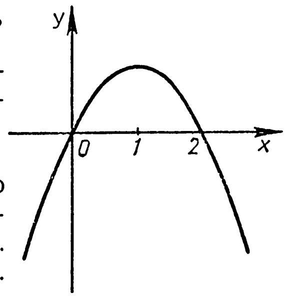


Рис. 21

— Маловато вы увидели... А ведь по графику можно многое установить относительно изображаемой функции... Раз это парабола, то функция квадратичная, которая в точках 0 и 2 обращается в нуль. Обратите внимание: ветки параболы направлены вниз — это значит, что коэффициент старшего члена квадратичной функции отрицательный. Поэтому эта функция такая: $y=-x(x-2)=2x-x^2$. По графику видно, что эта функция при $x<1$ возрастает, при $x=1$ она принимает наибольшее значение (максимум), равный, как легко видно, 1 и при $x>1$ убывает. Значения этой функции при $x<0$ и при $x>2$ отрицательны, а при $0<x<2$ — положительны.

Итак, вы видите, что каждый математический объект обладает многими свойствами, и надо уметь видеть эти свойства. Для этого следует тренироваться в подобных наблюдениях, с этой целью дома выполните следующее задание.

ЗАДАНИЕ 9

9.1. Сколько треугольников на чертеже (рис. 22)? А сколько квадратов? Какие еще фигуры имеются на этом чертеже?

9.2. Укажите не менее 8 свойств числа 16.

9.3. Какими свойствами обладает биссектриса BD треугольника ABC?

9.4. На прямой отмечены точки A, B, C, D, E. Сколько отрезков они определяют?

9.5. Укажите основные свойства функции $y=|x|-1$.

9.6. Какими свойствами обладает выражение $a+\frac{1}{a}$?

9.7. Что вы можете сказать о выражении $3^{n+1}-3^n$?

9.8. На чертеже (рис. 23) изображен график движения ученика из пункта O в пункт C. Как двигался ученик?

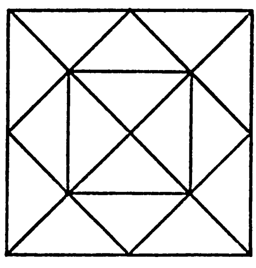


Рис. 22

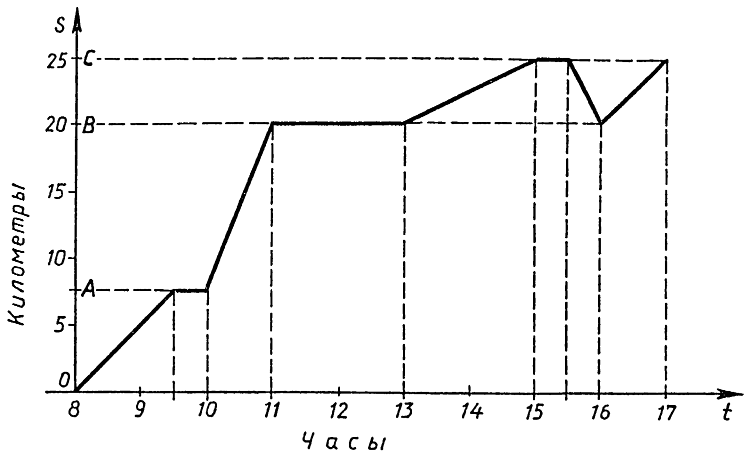


Рис. 23

9.9. На окружности взяты три точки A, B, C, которые затем соединены попарно между собой и каждая соединена с центром окружности. Какие фигуры при этом образовались?

ЗАНЯТИЕ 2. **УЧИТЕСЬ СРАВНИВАТЬ**

Должно быть, все вы не раз слышали крылатую фразу: *«Все познается в сравнении»*. И действительно, оценить что-либо, установить, чем оно является, хорошо это или плохо, каков данный объект, можно, лишь сравнивая его с каким-либо другим. Я показываю вам карандаш и спрашиваю: большой он или маленький? Вы мне, очевидно, скажете:

— А по сравнению с чем? По сравнению с одним предметом он большой, а по сравнению с другим — он маленький.

Если я вам покажу несколько предметов и спрошу: какой из них самый большой, то вы вправе мне сказать, что вопрос поставлен неверно, он бессмысленный. Ведь не сказано, по какому свойству (признаку, параметру) надо установить наибольший предмет: по длине, по объему, по массе или еще по какому-либо параметру.

Вообще сравнивать предметы можно лишь по определенному общему свойству (признаку, параметру).

Если это свойство не указано, то вопрос о сравнении предметов не имеет смысла, сравнение невозможно.

Значит, для того чтобы сравнить предметы, объекты, надо сначала выявить их общие свойства, а лишь затем установить, по каким свойствам эти предметы сходны (одинаковы, равны), а по каким они различны (неодинаковы). Если же объекты таковы, что они вообще не имеют общих свойств, то их и сравнивать нельзя. Например, треугольник и многочлен не имеют, видимо, каких-либо общих свойств, а поэтому их и сравнивать нельзя. Треугольник можно сравнить с другим треугольником, с многоугольником, многочлен можно сравнить с другим многочленом, но между собой треугольник и многочлен сравнивать нет смысла.

А сравнивать математические объекты нужно, ибо только в сравнении мы познаем их наиболее важные свойства, изучаем их. Сравнивая треугольники между собой, мы устанавливаем, какие виды треугольников могут быть, сравнивая их с другими геометрическими фигурами, мы выявляем их особые свойства, например их жесткость: из трех отрезков можно образовать один и только один треугольник (если, конечно, эти отрезки удовлетворяют соотношению, что каждый из них меньше суммы двух других), а вот из четырех отрезков можно образовать не один четырехугольник, а много различных. Свойство жесткости треугольников очень важное, оно широко применяется в технике, в строительстве.

Поэтому вполне прав поэт Р. Сеф, который в шутливой форме писал:

Кто ничего
Не замечает,
Тот ничего
Не изучает.

Кто ничего
Не изучает,
Тот вечно хнычет
И скучает.

Сравним, например, медиану и биссектрису треугольника. Обе они являются отрезками, обе они соединяют вершину треугольника с какой-то точкой противоположной стороны, но медиана делит эту сторону пополам, а биссектриса делит угол при вершине пополам. Сравним теперь медиану и высоту треугольника. Они более резко различаются между собой, чем медиана и биссектриса. Это проявляется хотя бы в том, что медиана и биссектриса всегда находятся внутри треугольника, а высота может проходить и вне его.

Посмотрите на числа 4, 16, 38, 10. Сравните их, что в них общего? Пожалуй, лишь то, что все они натуральные числа и все четные. А вот числа 1, 4, 9, 16, 25, 36 имеют более существенное общее свойство: все они представляют собой квадраты последовательных натуральных чисел. Поэтому если нужно продолжить первую последовательность чисел, то после 10 можно поставить любое четное число, а вот во второй после 36 можно поставить лишь 49, затем 64, с тем чтобы сохранить замеченное общее свойство (закономерность) этих чисел.

Выявить общее свойство данных объектов не всегда легко. Например, по какому общему свойству (закономерности) написана следующая последовательность чисел: 16, 12, 15, 11, 14, 10?

Сравнивая эти числа попарно, замечаем: $16-4=12$, $12+3=15$, $15-4=11$, $11+3=14$, $14-4=10$.

Значит, числа этой последовательности составлены так, что последующее число получается из предыдущего попеременно то вычитанием 4, то прибавлением 3. Поэтому если надо приписать к ней еще два числа, то можно написать такие числа: $10+3=13$ и $13-4=9$.

Но можно заметить и такое общее свойство чисел этой последовательности: она составлена из двух очень простых последовательностей: 16, 15, 14 и 12, 11, 10, причем члены второй последовательности расставлены между членами первой. Значит, чтобы приписать еще два числа к этой последовательности, продолжаем каждую из составляющих: 16, 15, 14, 13 и 12, 11, 10, 9 — и затем члены второй последовательности расставляем между членами первой: 16, 12, 15, 11, 14, 10, 13, 9.

Для нахождения общего свойства членов последовательности нам пришлось сравнивать между собой числа. Как известно, для сравнения чисел существуют два основных способа: *разностное* и *кратное сравнение*. При разностном сравнении мы находим разность этих чисел и по ней судим, какие из данных чисел больше, а какие меньше и *на сколько*. При кратном сравнении положительных чисел мы находим их частное и по нему в зависимости от того, больше оно или меньше 1, судим, какое из данных чисел больше, а какое меньше и *во сколько раз*.

Так, сравнивая разностным способом числа 4 и 12, находим, что $12-4=8$, Это значит, что 12 больше 4 на 8 или 4 меньше 12 на 8. Сравнивая эти же числа кратным способом, находим, что $4:12=\frac{1}{3}$ или $12:4=3$. Это значит, что 4 меньше 12 в 3 раза или составляет $\frac{1}{3}$ от 12, а 12 больше 4 в 3 раза.

Вы хорошо знаете способ сравнения отрезков путем непосредственного наложения их друг на друга. Точно так же путем наложения можно сравнивать углы. В результате такого непосредственного сравнения числа, отрезки, углы можно расположить по порядку возрастания или убывания. Точно так же можно сравнивать между собой квадраты, круги. А вот уже прямоугольники так сравнивать нельзя. Для их сравнения, так же как и для сравнения других фигур, в математике разработан метод *опосредственного сравнения с помощью измерения*.

Для этого сравниваемые объекты измеряют с помощью одной и той же единицы измерения, а затем сравнивают полученные числа. Так, для сравнения двух прямоугольников по площади их измеряют с помощью единицы измерения — квадрата — со стороной, равной единице длины, после чего остается сравнить полученные числа.

Эти два способа сравнения однородных объектов можно наглядно увидеть при нахождении массы тела. Когда мы сравниваем два предмета с помощью чашечных весов без гирь, то это способ непосредственного сравнения; когда же для сравнения этих же предметов их взвешивают на весах с помощью гирь, т. е. находят численную величину их массы, а затем сравнивают полученные числа, то это уже способ опосредственного сравнения.

Заметим, что два объекта можно сравнивать не по одному какому-то свойству (признаку), а, как правило, по разным и многим признакам (основаниям сравнения). Например, треугольники можно сравнивать по площади, по периметру, по виду углов (сравниваемые треугольники могут быть оба остроугольными или один из них остроугольный, а другой тупоугольный и т. д.), по соотношению сторон (например, один из них равнобедренный и т. д.) и еще по другим основаниям.

Сложнее сравнивать алгебраические объекты: многочлены, уравнения, тождества, функции и т. д. Так, сравнивая между собой многочлены, можно лишь установить, различаются ли они по числу переменных или по наивысшей степени переменных. Можно, конечно, их сравнить и по тому, какие буквы входят в эти многочлены: одни и те же или разные. Но это различие несущественное, ибо, например, многочлены x^2+xy+y^2 и a^2+ab+b^2 существенно не различаются: по сути дела это один и тот же многочлен.

Как видим, сравнение лежит в основе классификации объектов, а измерение есть способ сравнения, и в то же время само измерение производится с помощью сравнения измеряемого объекта с единицей измерения.

В основе решения большинства задач также лежит сравнение. А многие задачи прямо связаны со сравнением. Вот пример такой задачи.

Задача. *Хорда AB окружности, не проходящая через центр, разделена пополам в точке M. Докажите, что любая другая хорда, проходящая через точку M, больше хорды AB.*

Решение. В данном случае мы не можем непосредственно сравнить отрезки AB и CD произвольной хорды, проходящей через точку M, путем наложения одного их этих отрезков на другой (рис. 24). Значит, нам нужно их сравнить опосредственно. Как же это можно сделать? Способ измерения здесь не подходит, ибо мы должны сравнить отрезок AB не с одним каким-то определенным отрезком, а с любым, являющимся хордой окружности, проходящей через точку M. Значит, мы должны использовать какие-то теоремы о сравнении отрезков. Какие теоремы такого характера мы знаем? Имеются теоремы о сравнении сторон треугольников, например что в треугольнике против большего угла лежит и большая сторона. Но в данном случае нам нужно сравнить не просто отрезки, а хорды окружности. А что мы о них знаем? Вспоминаем такое их свойство: чем хорда окружности ближе к центру, тем она больше. Тогда найдем расстояние сравниваемых хорд AB

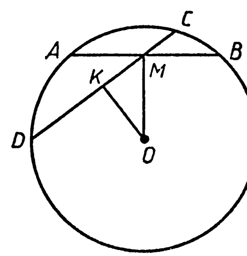


Рис. 24

и CD до центра O. Для этого из O опускаем перпендикуляры на AB и CD. Как известно, эти перпендикуляры проходят через середины хорд. Значит, $OM \perp AB$ и $OK \perp CD$. Рассматривая полученный прямоугольный треугольник OMK, находим, что $OK < OM$, ибо катет меньше гипотенузы. Следовательно, $CD > AB$, что и требовалось доказать.

Когда надо сравнить более двух объектов, то можно либо непосредственно сравнивать их попарно, либо заменить их такими объектами, сравнение которых осуществить просто и легко.

Например, нужно сравнить по росту трех учеников A, B и C. Можно это сделать двумя способами.

1-й способ. 1) Сравним непосредственно A и B (ставим их спиной друг к другу и видим, кто из них выше). Пусть $A < B$.

2) Сравниваем также B и C. Если $B < C$, то получаем: $A < B < C$. Если же $B > C$, то приходится произвести еще один шаг.

3) Сравниваем A и C. Если $A < C$, то получаем: $A < C < B$, если же $A > C$, то $C < A < B$.

2-й способ. Измеряем рост всех трех учеников, допустим, получили: $A = 158$, $B = 160$, $C = 156$. Осталось сравнить числа 158, 160 и 156. Это сделать легко, получаем: $156 < 158 < 160$, следовательно: $C < A < B$.

ЗАДАНИЕ 10

10.1. Сравните следующие пары математических объектов, укажите, по каким признакам (свойствам) они сходны, а по каким различны:

а) вертикальные и смежные углы;

б) круг и квадрат;

в) линейное уравнение и параллелограмм;

г) $a^2 + b^2$ и $x^3 + y^3$;

д) $\frac{3}{4}$ и $\frac{a-1}{a+2}$;

е) $x^2 - 5x + 6 = 0$ и $x^2 - 5x + 6 > 0$;

ж) прямоугольный треугольник и функцию $y = x^2$.

10.2. Верно ли произведено сравнение объектов, а если неверно, то в чем ошибка:

а) Сравнив треугольники ABC и MKL, установили, что ΔABC — прямоугольный, а ΔMKL — равнобедренный.

б) Сравнив два прямоугольника, установили, что один из них имеет площадь 48 м^2, а периметр другого равен 60 м.

в) Сравнив два круга, установили, что радиус одного из них равен 6 м, а радиус другого 8 м.

г) Сравнили два многочлена и установили, что степень первого из них равна трем, а второй есть сумма трех одночленов.

д) Сравнили треугольник ABC и многочлен M и установили, что площадь $\triangle ABC$ равна 10 м^2, а значение многочлена M при $x=2$ равно 10.

10.3. 4 различных по массе предмета требуется расположить в порядке убывания их масс. Пользоваться для этого можно лишь чашечными весами без гирь. Сколько взвешиваний достаточно для решения этой задачи?

10.4. Найдите общее свойство в следующих последовательностях чисел и допишите в каждой из них еще по два числа:

а) 82, 97, 114, 133...
б) 15, 16, 14, 17, 13, 18...
в) 9, 1, 7, 1, 5, 1...
г) 1, 8, 27, 64...
д) 66, 34, 18, 10, 6, 4...

ЗАНЯТИЕ 3. РАЗВИВАЙТЕ ВНИМАНИЕ И ВОЛЮ

Для того чтобы видеть любой математический объект во всем многообразии его свойств, чтобы сравнивать объекты, видеть их сходства и различия, надо обладать хорошо развитым вниманием.

На человека постоянно воздействуют много самых различных объектов. Но он не может охватывать с достаточной ясностью все эти объекты: одни он видит, слышит, осязает отчетливо, ясно, другие же смутно, нечетко либо вовсе не видит, не осязает. Из всей массы объектов, так или иначе воздействующих на человека в данный момент, он выделяет лишь один или несколько, которые для него интересны, важны, соответствуют его потребностям, его целям. Без такого сосредоточенного выделения отдельных объектов, на которые направляются наши органы чувств (зрение, слух, обоняние и т. д.), и отвлечения от всех других объектов, находящихся также в поле нашего восприятия, невозможна была бы никакая сознательная, целенаправленная деятельность.

Вот эта направленность и сосредоточенность нашего восприятия на определенных объектах или определенной деятельности при отвлечении от всего остального и называется *вниманием.*

Образно внимание определяют как дверь, через которую проходит в наше сознание все из внешнего мира.

Для того чтобы хорошо учиться, плодотворно работать, надо уметь открывать эту дверь, управлять ею, чтобы в наше сознание вошло значимое, ценное, а не какие-либо пустяки, которые только засоряют наш ум.

Различают *непроизвольное* (непреднамеренное) и *произвольное* (преднамеренное) внимание. Непроизвольное внимание — это внимание, возникающее без всякого намерения человека. Это такое внимание, когда дверь в наше сознание открывается сама по себе, неуправляемо. Такое внимание характерно для маленьких детей, они еще не умеют управлять своим вниманием.

Вы же должны уметь управлять своим вниманием, уметь открывать дверь в свое сознание, лишь имея определенную цель. Это и значит, что вы должны обладать достаточно развитым произвольным вниманием. Вы должны уметь управлять вниманием и направлять его на нужный объект, на значимую для вас деятельность.

Есть много разных способов проверки уровня развития произвольного внимания. Вот один из них.

Сделайте из плотной бумаги или картона 6 карточек со следующими таблицами:

21	12	7	1	20
6	15	17	3	18
19	4	8	25	13
24	2	22	10	5
9	14	11	23	16

9	5	11	23	20
14	25	17	19	13
3	21	7	16	1
18	12	6	24	4
8	15	10	2	22

14	18	7	24	21
22	1	10	9	6
16	5	8	20	11
23	2	25	3	15
19	13	17	12	4

22	25	7	21	11
6	2	10	3	23
17	12	15	5	18
1	16	20	9	24
19	13	4	14	8

5	14	12	23	2
18	25	7	24	13
11	3	20	4	16
6	10	19	22	1
21	15	9	17	8

20	8	23	5	11
3	25	13	17	2
10	15	21	7	22
24	1	19	9	14
18	6	12	4	16

В каждой таблице написаны числа от 1 до 25 в беспорядке. Вам же необходимо внимательно рассмотреть таблицу и отыскать все числа по порядку от 1 до 25. Время, затраченное на поиск, нужно фиксировать по секундомеру (или по обычным часам с секундной стрелкой). Если вы затрачиваете на каждую таблицу не более 30—35 с, то у вас развито внимание, если же больше, то слабо. Проследите также, как меняется затрачиваемое вами время от таблицы к таблице. Если оно резко меняется, то у вас неустойчивое внимание.

С помощью этих таблиц можно тренировать свое внимание. Для этого надо через некоторые промежутки времени, не менее часа, повторять работу с этими таблицами. Если постепенно по мере тренировки затрачиваемое время сокращается и при переходе от таблицы к таблице не меняется существенно, значит, внимание ваше развивается. Когда вы добьетесь, что на каждую таблицу вы будете затрачивать не более 15 с, то можете считать, что развили свое внимание вполне достаточно.

Вот *другой способ* проверки внимания. Разбейтесь на пары. Один из пары задает другому какое-либо двузначное число, например 43. Второй должен в течение 5 мин в хорошем темпе, не останавливаясь, прибавить к этому числу первую цифру 4, назвать сумму 47 и снова прибавить к этой сумме первую цифру 4, назвать сумму 51, прибавить первую цифру 5, назвать сумму 56 и т. д. Первый должен следить за правильностью второго и незаметно фиксировать ошибки. Если за 5 мин вы сделаете лишь 2—3 ошибки, то ваше внимание хорошо развито; если же число ошибок больше или вы в процессе работы останавливались, то вам следует тренировать свое внимание.

Это испытание внимания можно усложнить, а именно надо к заданному числу прибавлять попеременно то первую, то вторую цифру или попеременно прибавлять и отнимать первую и вторую цифры.

Еще один простой способ проверки и тренировки внимания. Составьте таблицу из 20 двадцатизначных чисел, например таких:

20345907518469206517;	91826047281092730532;	30612736823901772318
39180726408234031728;	19283062034806731958;	50317264908264072803
50391740827408940507;	50823582931708264254;	91072538609273213043
82650329470134627034;	20843731820460821932;	72640913274319265081
49130584086710327491;	31092847509164561080;	81902746531902746186
56719209431740195328;	61820943184310940819;	71082943194702868231
27409132804391740863;	43180274302753094716.	

По команде товарища, который проверяет ваше внимание, нужно вычеркнуть все какие-либо три цифры, которые вам назовет товарищ, например 0, 1 и 3. Эту работу следует проделать не более чем за 5 мин. После этого необходимо подсчитать число правильно зачеркнутых цифр, из него вычесть число допущенных пропусков и ошибочно зачеркнутых цифр. Затем найти процентное отношение полученного числа к общему числу цифр 0, 1, 3 в данной таблице, т. е. к числу 149. Если это отношение не менее 80%, то это неплохо, если же оно менее 80%, то вам надо тренировать свое внимание.

Упражнения с этой таблицей можно начать с вычеркивания одной какой-то цифры, затем двух цифр и лишь после того, как вы справитесь с этими заданиями, перейти к вычеркиванию трех цифр.

Развитие произвольного внимания, так же как и многих других качеств человека, связано с укреплением *воли*. Воля человека позволяет ему управлять и регулировать свою деятельность, управлять своими поступками. Когда вы умеете четко выполнять режим дня, умеете заставлять себя предельно внимательно слушать урок, доклад, выполнять аккуратно все домашние задания, то тем самым вы проявляете свою волю. Очень важно укреплять свои волевые качества, тренировать себя для развития этих качеств. Ведь настоящий человек — это человек с сильной волей!

Когда вы ставите перед собой задачу внимательно выполнить те или иные задания на проверку внимания, а затем добиваетесь путем тренировки достижения нужного развития произвольного внимания, то этим самым вы не только развиваете свое внимание, но и укрепляете свою волю. То же самое происходит при выполнении вами всех других заданий.

Имеются и особые методы по укреплению своей воли, своих волевых качеств. Вот один из простейших.

Прикрепите к стене лист белой бумаги с нанесенной на нем хорошо видимой точкой. Сядьте на некотором расстоянии перед этим листом в удобной позе и попытайтесь сосредоточить все свое внимание на этой точке. Причем точка должна быть все время в центре вашего внимания: кроме точки, вы ничего не должны видеть и ни о чем другом не думать.

На первых порах, должно быть, вы сумеете сосредоточить свое внимание на рассматриваемой точке не более 15—20 с. Затем точка начнет расплываться, как бы уходить из поля зрения. В голову начнут лезть совершенно посторонние мысли, которые и уводят ваше внимание от рассматриваемой точки.

Но если вы будете часто тренироваться, скажем раз в день или через день, в удержании своего внимания на этой точке, то постепенно достигнете хороших результатов и тем самым разовьете свою волю. Однако это равитие воли надо укреплять и в повседневной своей работе, в своем поведении.

ЗАДАНИЕ 11

11.1. Найдите в приведенных примерах все 12 допущенных ошибок. На эту работу вы должны затратить не более 3—4 мин. После этого еще раз себя проверьте, не пропустили ли вы ошибки или подчеркнули там, где нет ошибки.

3+12=15	15−8=7	16+4=22	13+3=10	16+8=23
13−4=9	16−9=7	16+9=28	13−2=11	12−6=6
19+5=24	15−4=11	15−2=13	15+9=25	12−4=16
15+5=10	14−9=5	12−9=3	5+17=22	7+18=25
2+11=13	4+18=22	6+15=22	18−8=10	16−5=11
12−7=5	19−7=13	17+7=23	19−6=13	5+13=18
16+6=22	16−2=13	14−8=6	14+9=23	13−5=18
18+4=22	18−4=12	14+8=22	9+12=21	23−9=14

11.2. Решите быстро следующие задачи:

а) На лесопильном заводе машина за 1 мин отпиливает от бревна кусок длиной 2 м. За сколько минут будет распилено на такие куски бревно длиной 10 м?

б) Какова длина бревна, на распиловку которого на такие куски машина затратила 6 минут?

в) За сколько времени будет распилено таким образом бревно в 16 м?

г) Сколько распилов надо сделать, чтобы распилить на такие куски бревно в 12 м?

11.3. Решите приведенные задачи:

а) Сколько простых предложений в сложном, если в нем поставлены три запятые?

б) Сколько запятых надо поставить, если сложное предложение состоит из трех простых?

в) В сложном предложении расставлены 4 запятые. Сколько в нем простых предложений?

г) Сколько запятых надо поставить в сложном предложении, состоящем из 4 простых?

11.4. Женщина обращается к кому-то из вашего класса и говорит: «Я тебе мать, но ты мне не сын». Что это значит?

11.5. Решите задачи:

а) Пара лошадей пробежала 10 км. Сколько километров пробежала каждая лошадь?

б) В 9 ч утра из A в B вышел автобус со скоростью 40 км/ч, а одновременно из B в A вышла автомашина со скоростью 60 км/ч. Они встретились в 11 ч. Какая из этих машин в момент встречи находилась ближе к B?

в) Рабочий во вторник изготовил на 10% деталей меньше, чем в понедельник, но зато в среду он изготовил на 10% деталей больше, чем во вторник. Когда он изготовил деталей больше: в понедельник или в среду?

ЗАНЯТИЕ 4. УКРЕПЛЯЙТЕ СВОЮ ПАМЯТЬ

За годы обучения математике вы получите огромное число самых различных знаний, и их надо помнить. Если вы что-то важное забудете, то не сумеете решить задачу, доказать новую теорему. Значит, для изучения математики нужно иметь хорошую память. Хорошую память надо иметь и для будущей работы, для повседневной жизни. Если вы что-то делаете хорошо, быстро и легко, этому способствует хорошая память. А представьте себе, во что превратилась бы наша жизнь, если бы мы вдруг потеряли память? Мы бы не знали, что и как делать, и всякий раз вынуждены были заново изучать и осваивать любое самое простейшее действие, а после этого снова забывали бы его. Нормальная жизнь была бы невозможна.

Память надо развивать и укреплять. И при этом очень важно учесть следующее обстоятельство: *для изучения математики надо иметь хорошую память, и в то же время в процессе рационального и разумного изучения математики ваша память совершенствуется и укрепляется.* Если же учение вами организовано неразумно, нерационально, то тем самым можно не только не укрепить свою память, а ее разрушить, искалечить. Это относится, конечно, не только к памяти, но и ко всем другим качествам, особенно к мышлению.

Память — это запоминание, сохранение и воспроизведение всего того, что было в нашем опыте, в восприятии и действии.

Существуют разные виды памяти: *двигательная* (запоминание, сохранение и воспроизведение различных движений, например ходьбы, письма и т. д.), *эмоциональная* (память на чувства, переживания), *образная* (память на представление, она бывает зрительной, слуховой, осязательной, обонятельной, вкусовой; наибольшее значение для изучения математики имеет, конечно, зрительная и слуховая память) и *словесно-логическая* (память на мысли, понятия, знания — это наиболее важный вид памяти для изучения математики, именно с ее помощью вы и овладеваете всеми премудростями математики).

Память делят также на *непроизвольную* (непреднамеренную) и *произвольную* (преднамеренную). Когда мы что-то запоминаем, сохраняем и можем воспроизвести, не ставя перед собой цель запомнить, а запоминаем попутно в процессе деятельности, то это и есть непроизвольная память. Когда же мы ставим такую цель, то говорят о произвольной памяти. В процессе учения имеют значения оба вида памяти. Конечно, было бы хорошо все запомнить как бы попутно, в процессе вычислений, доказательств, выводов, без специальных усилий на запоминание. Но это не всегда возможно, и вы должны научиться управлять своей памятью, руководить ею и ставить перед собой в нужных случаях цель прочно и надолго запомнить изученное.

Непроизвольное запоминание, как уже было сказано, происходит главным образом в деятельности, в действиях с математическими объектами. Когда вы решаете задачи, выводите формулы, доказываете теоремы и при этом активно используете те или иные знания, правила и законы, то тем самым вы непроизвольно эти знания, правила и законы запоминаете.

Поэтому лучший и наиболее рациональный способ запоминания знаний — это их активное и многократное использование. Решаете задачи, доказываете теоремы и при этом припоминайте и формулируйте все те знания, на основе которых решаются задачи и доказываются теоремы, и вы тем самым без всяких на то специальных усилий хорошо и прочно запомните все эти знания. Но для этого надо обязательно, во-первых, ставить цель понять и освоить все эти знания, а во-вторых, припомнить и полно формулировать используемые знания.

Однако в ряде случаев приходится и специально ставить цель что-то запомнить, заучить. Для этого используются разные способы рационального запоминания. Самый нерациональный, неразумный, даже вредный способ — это зубрежка, механическое и многократное повторение одного и того же учебного материала. Ни в коем случае не занимайтесь зубрежкой, ибо вы можете тем самым искалечить свой ум, свою память.

Рациональные способы произвольного запоминания — это такие, которые основаны на понимании, на логическом осмыслении запоминаемого. Значит, чтобы что-то заучить, надо захотеть запомнить, затем понять и осмыслить материал, который вы заучиваете, для чего разбить его на составные (смысловые) части, продумать каждую часть, выделить в ней главное содержание, основную идею, дать каждой части свое название (тем самым составить план заучиваемого материала), сравнить с другими, ранее изученными знаниями и тем самым ввести заучиваемое в систему ваших знаний.

Иногда можно использовать и особые приемы для запоминания. Все такие приемы называются *мнемоническими*, от имени древнегреческой богини памяти Мнемозины. Например, чтобы запомнить первые цифры числа π, придуманы разные фразы, число букв, в каждом слове которых есть цифра числа π. Вот одна из таких удачных фраз:

«Это я знаю и помню прекрасно».
3 1 4 1 5 9... ,

которая дает вполне достаточное по точности значение числа $\pi = 3{,}14159\ldots$.

В процессе изучения математики используются два типа памяти: *кратковременная* и *долговременная*.

Когда мы что-то вычисляем, преобразуем, то все промежуточные результаты и сами условия мы помним лишь до завершения работы, а затем забываем. Это хорошо и разумно, ибо для чего *засорять* свою память ненужными данными, ведь они нам нужны лишь для решения данной задачи, а для последующей работы они вовсе не нужны. В этом случае действовала лишь одна кратковременная память.

Долговременная память возникает тогда, когда некоторые из внешних воздействий (знаний, фактов, понятий и т. д.), имеющих особое для нас значение, перерабатываются в нашем уме, осмысливаются, и тогда они переходят в долговременную память и запоминаются надолго. Таким образом, при восприятии и деятельности все воспринимаемое как бы сортируется: одни из этих восприятий отправляются в кратковременную память и затем выбрасываются, забываются; другие же осмысливаются, перерабатываются и отправляются в долговременную память, где сохраняются достаточно долго. Процесс перехода воспринимаемого материала в долговременную память требует известного времени (от получаса до часа), в то время как процесс кратковременного запоминания происходит мгновенно.

Проверить свою кратковременную память можно, например, таким образом. Приготовьте на листе бумаги следующую т а б л и ц у:

37	48	95							
24	73	58	49						
89	65	17	59	78					
53	27	87	91	23	47				
16	51	38	43	87	14	92			
72	84	11	85	41	68	27	58		
47	32	61	18	92	34	52	76	81	
69	15	93	72	38	45	96	26	58	83

С помощью этой таблицы можно производить проверку как зрительной, так и слуховой кратковременной памяти. С п о с о б проверки слуховой памяти: попросите кого-либо называть вам сначала числа первой строки, после чего вы их записываете, затем называть числа второй строки, после этого вы записываете эти числа и т. д. Если вы сумеете записать по памяти все числа не выше 3—4-й строки без ошибок, то у вас вполне нормальная слуховая кратковременная память.

Для проверки зрительной памяти надо открывать по порядку каждую строчку таблицы, рассматривать ее в течение примерно полминуты, затем, закрыв таблицу, воспроизвести по памяти числа данной строчки. Если вы сумеете безошибочно воспроизвести все числа не выше 3—4-й строчки, то у вас нормальная память.

Вот другой способ. Попросите кого-либо, чтобы он нарисовал на листе бумаги 12 геометрических фигур, например: правильный треугольник, окружность, квадрат, окружность со вписанным треугольником, окружность с описанным квадратом, параллелограмм, прямоугольник, трапецию, ромб, пару вертикальных углов, треугольник с вписанным квадратом, ромб с вписанной окружностью. И все эти фигуры пусть он раскрасит двумя цветами, притом сложную фигуру, состоящую из двух, надо раскрасить двумя цветами; получится, например, красный круг с синим треугольником или синий квадрат с красным кругом и т. д.

Вам показывают этот рисунок, и вы его должны внимательно рассматривать в течение одной минуты. Затем, закрыв рисунок, вы по памяти должны назвать все нарисованные фигуры. Если вы правильно вспомните не менее 8 фигур, то у вас вполне нормальная память.

Если ваша память (слуховая, зрительная или образная) оказалась несколько ниже нормы, то с помощью указанных способов можно тренировать свою память, для чего нужно соответствующую проверку повторить до тех пор, пока вы не достигнете нормы, при этом промежуток между повторными проверками должен быть не менее часа, а лучше сутки.

Одно из свойств памяти, которое следует особо учитывать,— это *забывание*. Проделайте такой опыт. Пусть ваш товарищ назовет вам 8 цифр в случайном порядке. Вы должны тут же их повторить. Если вам удастся повторить не менее 6 цифр, то это вполне нормально. Затем проверьте, сколько из этих цифр вы сумеете повторить через 1 мин, затем через 2 мин, через 5 мин. Вы убедитесь, что сумеете повторить уже не все цифры, которые вы повторили первоначально, а значительно меньше. Это и есть забывание.

Забывание происходит как того, что *запомнилось* кратковременной памятью, так и того, что взошло в долговременную память. Поэтому, для того чтобы что-то запомнить прочнее и надолго, надо это (знание) неоднократно использовать и повторять. При этом лучший способ — это многократное использование с активным воспроизведением этого знания в процессе использования.

Согласно исследованиям забывание происходит наиболее бурно в первые дни после запоминания. Вот почему важно повторить изученное на уроке в тот же день или в крайнем случае через день с тем, чтобы приостановить процесс забывания.

В заключение приведем некоторые правила заучивания учебного материала.

1. *Заучивай лишь то, что понимаешь. Надо сначала понять, а уже потом ставить цель заучить, запомнить.*

2. *Заучивая, ставь цель запомнить надолго.*

3. *Пользуйся при заучивании смысловыми опорами. Для*

этого разбивай заучиваемый материал на логические части, обозначай каждую часть своим названием, передающим смысл этой части. Эти названия и будут служить смысловыми опорами.

4. *Заучивай и повторяй небольшими дозами.*

5. *Лучше учить частями несколько дней, чем все в один день.*

6. *Нельзя заучивать учебный материал по математике, лишь читая его по учебнику или тетради (вслух или про себя). Надо обязательно этот материал воспроизводить на бумаге: нарисовать чертеж, написать схему теоремы и ее доказательства и т. д., т. е. заучивать надо в действии.*

7. *Старайся воспроизвести заучиваемый материал по памяти, а не глядя в книгу.*

ЗАДАНИЕ 12

12.1. Почему лучше готовиться к следующему уроку сразу после сегодняшнего урока, а не вечером перед этим уроком?

12.2. Чем вредны шпаргалки?

12.3. Играет ли роль характер цели запоминания: запомнить, чтобы ответить при опросе на следующем уроке, или запомнить, чтобы помнить долго, всю жизнь?

12.4. Что надо делать, если забыл какую-то формулу, тождество?

12.5. Нужно ли дословно запоминать доказательство теоремы?

ЗАНЯТИЕ 5. РАЗВИВАЙТЕ СВОЕ ВООБРАЖЕНИЕ И МЫШЛЕНИЕ

Вся математика есть результат деятельности воображения и мышления человека. Ведь математические объекты реально не существуют, их нет в природе, вокруг нас, они — плод воображения и мышления, но отражающие предельно точно этот окружающий нас мир.

В окружающем нас мире нет геометрических фигур, нет чисел и функций, нет многочленов и уравнений. Но в этом мире есть предметы, имеющие форму, есть совокупности предметов, имеющие величину и количество, происходят явления и процессы, в которых предметы находятся в каких-то меняющихся отношениях. Однако, для того чтобы отделить форму от предметов, величину и количество от их совокупности, отношения от явления и процессов и сделать эти формы, величины, количества и отношения самостоятельными объектами, нужна была огромная работа в течение тысяч лет человеческого воображения и мышления.

Поэтому и изучение математики, овладение ею требует развитого воображения и мышления. Нужно упорно учиться видеть и действовать в уме. Учитель говорит: «Если повернуть параллелограмм вокруг точки пересечения диагоналей на 180°, то, как вы думаете, совпадает ли он со своим первоначальным положением?».

Чтобы правильно ответить на этот вопрос, мы должны мысленно представить себе то, о чем говорил учитель: увидеть параллелограмм с диагоналями, увидеть процесс его поворота вокруг точки пересечения диагоналей, и тогда вы сможете точно, а не наугад ответить на заданный вопрос. Вы читаете в учебнике: «В $\triangle ABC$ проведены из вершины C высота, биссектриса и медиана». И вы должны вообразить этот треугольник ABC, увидеть, что его стороны AC и CB не равны, ибо в противном случае высота, биссектриса и медиана просто слились бы, увидеть, что высота проходит ближе к меньшей стороне, а биссектриса и медиана — ближе к большей стороне, но вот неясно, проходит ли биссектриса между высотой и медианой или же медиана между высотой и биссектрисой. Это уже требует особого исследования.

Однако надо не только видеть в уме услышанное или прочитанное, но надо уметь и действовать в уме. Вам надо разделить 235 698 на 2. Неужели вы будете это делать углом? Нет, вы должны сразу писать ответ, выполняя все промежуточные действия в уме. Или вам надо преобразовать алгебраическое выражение, уравнение, неравенство. И опять-таки многие промежуточные преобразования надо выполнять в уме, устно.

Умение видеть и действовать в уме особенно вам понадобится, когда вы начнете изучать стереометрию — геометрию в пространстве. Ведь бумага, на которой вы можете чертить, изображать изучаемые в стереометрии пространственные фигуры, плоская. Поэтому без воображения, без умения видеть и действовать в уме вы не сможете понять никакой чертеж, никакое изображение пространственных фигур. С необходимостью видеть и действовать в уме вы встретитесь и на любой работе. Токарь, слесарь, конструктор, технолог, архитектор, строитель должны уметь по плоскому чертежу увидеть сложную пространственную деталь, сооружение или машину. Геолог, географ, военный, агроном должны уметь по карте или плану увидеть все особенности местности, сориентироваться на ней. Для того чтобы разумно выполнить некоторую работу, надо предварительно ее спланировать, «проиграть» в уме, а уже затем начать действовать.

Математика изучает общие свойства бесконечных совокупностей математических объектов. Когда вы доказали, что сумма углов треугольника равна 180°, то тем самым вы установили, что этим свойством обладает любой треугольник, а их бесконечное множество. Но чтобы это свойство установить, надо было сначала его заметить, сформулировать и уже потом доказать. Человечество приходило к математическим истинам не сразу, а постепенно, замечая свойства отдельных объектов, а затем обобщая их. Еще древние египтяне знали, что треугольник со сторонами 3, 4 и 5 прямоугольный, и пользовались этим для построения прямого угла на местности. Но прошло много сотен лет, пока это частное свойство одного треугольника было обобщено для любых прямоугольных треугольников и была доказана теорема, обратная теореме Пифагора.

Значит, важно учиться *обобщать* единичные факты, наблюдения. Вот вы наблюдаете такие факты: $\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=2\frac{1}{6}>2$; $0{,}4+\frac{1}{0{,}4}=2{,}9>2$. И из этих наблюдений вы должны суметь сделать такое обобщение:

$$a+\frac{1}{a}\geqslant 2, \text{ если } a>0.$$

Конечно, это обобщение затем надо будет доказать.

Здесь проявляется ваша *сообразительность,* умение делать *догадки.* А ведь сообразительность и основана на умении видеть общее в частном, видеть сходство в различном. Какая связь, например, между медианой треугольника и диагональю параллелограмма?

На первый взгляд, кажется, что никакой. А связь есть, и весьма непосредственная. Продолжите медиану CD $\triangle$ ABC на ее длину ($DE=CD$) и соедините полученную точку E с вершинами A и B. Получите параллелограмм $ACBE$, в котором медиана CD является половиной диагонали CE.

Значит, для того чтобы успешно учиться математике, овладевать ею, вам надо развивать свое воображение и мышление, упорно учиться видеть и действовать в уме, обобщать и догадываться, развивать свою сообразительность. Что для этого нужно делать? Нужна упорная и терпеливая работа над собой, нужно проявлять волю и настойчивость в преодолении трудностей, возникающих в процессе учения. Если решаете задачу, то решайте ее самостоятельно, и если она не «выходит», то имейте терпение посидеть над нею и, может быть, не один день, но добейтесь и найдите ее решение. Критически анализируйте свои качества, свои умения, не стесняйтесь признаваться, что вы еще что-то не знаете, что-то не умеете, что у вас то или иное качество недостаточно развито, и упорно работайте над собой, чтобы развить это качество, овладеть этим умением, этим знанием.

И пожалуйста, не ссылайтесь на то, что у вас нет способностей к математике. Вы должны сами работать над собой. Здесь уместно напомнить изречение основоположника итальянской компартии Антонио Грамши (1891—1937), что человек сам творит себя, хотя и в зависимости от условий общества, своего положения в нем, полученного воспитания. Человек — это процесс его собственных действий, производимых по его собственной воле.

Итак, работайте над собой. Приводим некоторые из задач, которые можно использовать для развития и тренировки указанных качеств.

ЗАДАНИЕ 13

13.1. Выполните устно следующие действия: $56+13+18$; $24+16+14+47$; $39+48+13$; $326-83$; $624-73$; $516-123$; $31\cdot8$; $165\cdot6$; $536:4$; $1488:8$; $17\cdot19$; $72\cdot12$; $145\,782:13$.

13.2. Попросите кого-либо, чтобы вам продиктовали следующие примеры, которые решите устно, записывая лишь ответ: $16+23+18$; $34+17+23$; $263+24$; $89+77$; $87-42+14-38$; $881-95$; $18\cdot6$; $108\cdot7$; $485:5$; $2472:3$; 3^5.

13.3. Решите устно следующие примеры: $23{,}8+14{,}7$; $2\frac{1}{5}+3\frac{2}{3}$; $4\frac{3}{4}+2\frac{5}{6}$; $18{,}7-9{,}3$; $37{,}2-19{,}5$; $3\frac{1}{5}\cdot3\frac{3}{4}$; найти: $\frac{5}{8}$ от 344; $\frac{2}{5}$ от 1035; 75% от 80; 15% от 1280.

13.4. Вычислите устно:

$$M=\frac{(a+x)(b-y)}{a-2y} \text{ при } a=17,\ b=26,\ x=23,\ y=6.$$

$$K=\frac{2x-y}{x-y(x+y)} \text{ при } x=3{,}3,\ y=0{,}7.$$

13.5. Составьте таблицу значений функции $y=\frac{5x+1}{4}$ при $x=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 10;\ 30;\ 41$.

13.6. Вычислите устно: $(-121)+(+43)+(-79)+(+57)$; $(-16{,}5)-(-18)$; $(+2{,}2)\cdot(-12)$; $\left(-17\frac{1}{4}\right)\cdot(-0{,}125)\cdot(-4)\cdot(+8)$; $(-18):\left(-4\frac{1}{2}\right)$; $(-128):(+6{,}4)$.

13.7. Выполните устно приведение подобных членов:

а) $\frac{1}{2}a^2b-\frac{5}{8}a^2b+\frac{1}{4}a^2b-\frac{3}{32}a^2b$;

б) $3xy^2-y^2-5xy^2+4y^2+2xy^2$;

в) $\frac{b^3}{15}-\frac{b^2}{4}+\frac{b^3}{10}+\frac{b^2}{8}$;

г) $0{,}2(a^2+b^2)+3{,}25(a^2+b^2)-\frac{2}{5}(a^2+b^2)-2{,}05(a^2+b^2)$;

д) $0{,}65(a^2-x^2)-1\frac{7}{25}(a^2-x^2)-0{,}95(a^2-x^2)+0{,}42(a^2-x^2)$.

13.8. Решите устно уравнения и неравенства:

а) $7(3x-17)-5(4+x)=5$;

б) $\frac{2x+5}{3}-\frac{10x-1}{4}=1$;

в) $\frac{3x+41}{2}-\frac{x-3}{5}-\frac{9-2x}{6}=0$;

г) $2x-3>x+2$;

д) $\begin{cases} 3x+4>5x-6 \\ -2x+3<x-6. \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 14

14.1. Представьте себе куб, вершины нижнего основания которого обозначены в порядке движения против часовой стрелки A, B, C и D, а соответствующие вершины верхнего основания A_1, B_1, C_1 и D_1. Назовите, не глядя на чертеж: а) диагональ куба и диагонали граней куба, выходящие из вершины C; б) диагонали всех боковых граней куба; в) в передней грани проведена диагональ AB_1. Какие диагонали смежных граней не пересекаются с данной диагональю?

14.2. Игра в «пять».

На шести расположенных в два ряда клетках в произвольном порядке размещены пять перенумерованных фишек. Например:

2	3	5
	1	4

За один ход можно передвинуть в свободную клетку одну из фишек, стоящую рядом по горизонтали или вертикали. Игра состоит в том, чтобы за наименьшее число ходов перейти от исходного расположения фишек к заданному конечному расположению:

1	2	3
	4	5

В данном случае задача решается за 6 ходов:

1-й

2	3	5
1		4

2-й

2	3	5
1	4	

3-й

2	3	
1	4	5

4-й

2		3
1	4	5

5-й

	2	3
1	4	5

6-й

1	2	3
	4	5

Решите задачи этой игры для следующих начальных расположений фишек:

а)

2	4	3
	1	5

б)

4	1	3
	2	5

в)

4	3	5
	2	1

14.3. Вообразите шахматную доску. Как вы знаете, она представляет собой квадрат, разбитый на $8 \times 8 = 64$ клетки — поля доски. Вертикали доски (слева направо) обозначаются буквами a, b, c, d, e, f, g, h, а горизонтали (снизу вверх) — числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Поэтому каждое поле шахматной доски обозначается двумя знаками: буквой и числом. Так, самое левое нижнее поле обозначается $a1$, а самое правое верхнее — $h8$.

Решите мысленно, без фигур, не глядя на доску, следующие задачи, записывая лишь на бумаге ваши ходы:

а) Конь занимает поле $a1$. Через какие поля он должен ходить, чтобы за наименьшее число ходов перейти на поле $h8$?

б) Белый конь находится на поле $b1$, а черный — на поле $b4$. Как им поменяться местами, не оказавшись ни разу под боем?

в) Как должен ходить конь, чтобы с поля $a1$ перейти на поле $a8$?

г) Белый слон находится на поле $a1$, а черная неподвижная пешка — на поле $f6$. Как должен ходить слон, чтобы оказаться на поле $g7$?

д) Белый слон находится на поле $c1$, а черный неподвижный ферзь — на поле $f6$. Как должен ходить слон, чтобы оказаться на поле $c7$?

е) Белый слон находится на поле $b1$, а неподвижные черные ферзь и ладья находятся на полях $g7$ и $d4$. Какие ходы должен сделать слон, чтобы попасть на поле $c6$?

ЗАДАНИЕ 15

15.1. Какой общий вывод относительно произведения можно сделать на основе следующих примеров:

$$12\cdot3=36;\ 12\cdot2=24;\ 12\cdot\frac{3}{4}=16;\ 12\cdot1=12;\ 12\cdot\frac{3}{4}=9;$$

$$12\cdot\frac{1}{2}=6;\ 12\cdot\frac{1}{6}=2?$$

15.2. Обобщите следующие примеры:

а) $6\cdot\frac{1}{6}=6;\ .\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1;$ б) $(-4)^2=16;\ (-4)^3=-64.$

15.3. Заметьте, что $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$. На какую цифру оканчивается число 3^{423}?

15.4. Известен следующий признак делимости на 9: если сумма цифр n числа делится на 9, то и само число делится на 9. Догадайтесь, каков признак делимости на 99.

15.5. Напишите общую формулу n-го члена следующих последовательностей: а) 1, 4, 9, 16 ...

б) $\frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \dots$ г) 0,1; 0,01; 0,001; ...

д) 3, 7, 11, 15, ...

в) $1,\ \frac{3}{4};\ \frac{5}{9};\ \frac{7}{16};\ \dots$ е) 4, —12, 36, —108 ...

15.6. Вы знаете, что $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$. Напишите, чему равно следующее выражение, выполняя все промежуточные преобразования устно: а) $(-x-y)^2$; б) 39^2; в) $(a+b+c)^2$.

15.7. Имеется теорема: *«Около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну»*. Как иначе можно сформулировать эту теорему?

15.8. Общее уравнение окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=c^2$, где (x_0, y_0) — координаты центра окружности, а r — радиус окружности. Каков геометрический смысл уравнения $(x-2)^2+(y-3)^2=$ $=0$?

15.9. По уравнению прямой написать координаты каких-либо двух ее точек: а) $-x-y=1$; б) $y=2$; в) $x=-2$.

15.10. Какая связь между равнобедренным треугольником и ромбом? Какие свойства ромба являются следствиями свойств равнобедренного треугольника?

15.11. Дана задача: «Через первый кран ванна наполняется за 3 ч, а через второй — за 2 ч. За сколько времени наполнится ванна, если открыть одновременно оба крана?» Составьте задачи, аналогичные данной, чтобы в них шла речь: а) о работе комбайнеров; б) о движении поездов.

15.12. Известно, что если $ab=0$, то a или b либо a и b одновременно равны нулю. Где и как используется это свойство?

15.13. Какая связь между прямоугольным треугольником и прямоугольником? Какое свойство медианы прямоугольного треугольника следует из свойств прямоугольника? Какое свойство прямоугольника следует из свойств прямоугольного треугольника?

ЗАДАНИЕ 16

16.1. Крышка стола имеет 4 угла. Если один из углов отпилить, то сколько станет у крышки углов?

16.2. Разделить 5 батонов хлеба между 6 человеками, не разрезая ни один батон на 6 равных частей.

16.3. Гусеница за день вползает вверх по дереву на 5 м, а за ночь спускается на 2 м. Если она начала вползать на 9-метровое дерево в воскресенье в 6 ч утра, то когда она достигнет вершины?

16.4. Расшифруйте действие:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} \text{С О Р О К} \\ \text{О Д И Н} \end{array} \\ \hline \text{Т Р И С Т А} \end{array}$$

16.5. На математическом вечере ведущий объявил: «Кто желает проверить, что я могу угадать дату вашего рождения, возьмите листочек бумаги и произведите следующие действия: число дня вашего рождения умножьте на 20 и прибавьте 180. Сумму умножьте на 5 и прибавьте число месяца рождения. Умножьте эту сумму на 20 и прибавьте 145, результат умножьте на 5 и прибавьте число из двух последних цифр года вашего рождения. Назовите конечный результат, и я скажу дату вашего рождения». Один из участников назвал результат: 271 194. Ведущий ему сказал: «Вы родились 18 апреля 1969 г.». Как он это угадал?

16.6. Как отметить на сторонах прямоугольника 12 точек, чтобы на каждой стороне было отмечено 4 точки?

16.7. 39 школьников класса были распределены на несколько бригад по сбору металлолома и 4 бригады по сбору макулатуры с таким числом школьников в каждой, сколько бригад по сбору металлолома. Сколько школьников в каждой бригаде по сбору металлолома и по сбору макулатуры?

16.8. На склад поступило 100 кг грибов. Проведенный анализ показал, что в грибах имеется 99% воды. Через некоторое время анализ повторили. Оказалось, что содержание воды уменьшилось до 98%. Какова теперь масса грибов?

16.9. Внук спросил бабушку: «Сколько тебе лет?» Она ответила: «Каждая из двух цифр в числе моих лет равна возрасту твоих двоюродных братьев Коли и Саши».— «Но я не знаю, сколько им лет»,— возразил внук. «Если ты сложишь вместе возраст Коли, Саши и мой, то получится 83». Сколько лет бабушке?

16.10. В комнате находятся два отца, два сына, дед да внук, а всего трое. Как это может быть?

16.11. Придумайте уравнение, корнями которого являются все числа от 2 до 5.

16.12. Что это за четырехугольник, у которого диагональ перпендикулярна двум неравным сторонам? А если эта диагональ перпендикулярна двум равным сторонам?

16.13. Саша и Коля измерили расстояние между точками A, B, C. Саша сказал: «$AB=1$, $BC=2{,}5$», а Коля сказал: «$AB=12$, $BC=30$». Оба мальчика утверждали, что они произвели измерение правильно. Может ли это быть?

16.14. Основание треугольника равно 1 мм. Может ли его площадь быть равной 1 м^2?

16.15. Докажите, что биссектриса разностороннего треугольника не может быть перпендикулярна стороне треугольника.

16.16. Докажите, что квадратное уравнение не может иметь три различных корня.

16.17. Докажите, что если один из углов ромба равен 30°, то его нельзя вписать в окружность. Сформулируйте эту теорему в общем виде.

16.18. Докажите, что если трапеция не равнобочная, то вокруг нее нельзя описать окружность. А можно ли в нее вписать окружность?

16.19. Напишите квадратное неравенство, которое не имеет решений.

16.20. Радиусы трех окружностей 1 м, 10 м и 10 000 м. Радиус каждой окружности увеличили на 1 м. Длина какой окружности увеличится при этом больше других?

16.21. Любой остроугольный треугольник можно образовать из двух прямоугольных треугольников. Докажите, что сумма двух сторон такого треугольника так относится к третьей, как разность проекций первых двух сторон на третью относится к разности этих сторон.

16.22. Какой угол образует между собой часовая и минутная стрелки часов в 3 ч 24 мин?

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

1.1. В соответствии с аксиомой (теоремой): через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и притом только одну. Четыре же точки могут не лежать в одной плоскости.

1.2. Недостаточно, ибо он таким образом мог установить лишь, является ли лоскут ромбом.

1.6. $|x-2|$ есть расстояние от точки X до точки 2. $|x-2|+|x-5|$ есть сумма расстояний от точки X до точек 2 и 5. Эта сумма всегда больше $5-2=3$. Поэтому уравнение не имеет решений при $a<3$.

1.7. Каждому четному числу $2n$ соответствует одно и только одно нечетное число $2n-1$, поэтому количество их одинаково в натуральном ряду.

1.8. Причина в том, что сравниваются бесконечные множества чисел, а не конечные.

2.1. а) Круг; б) окружность; в) прямоугольник.

2.2. Натуральные числа. Можно решить, например, такую задачу: «Зная номер человека в очереди и сколько времени в среднем занимает обслуживание одного покупателя, узнать, сколько времени ему придется стоять в очереди».

2.3. Математическое описание поездки велосипедиста можно сделать с помощью графика.

3.1. Существенные: а, в, несущественные: б, г и д.

3.2. Математические объекты одного и того же вида составляют объем соответствующего математического понятия.

3.3. Суждения: б, г.

3.4	Названия объектов	Род	Видовые отличия
а)	Рациональные числа	Число	Можно записать в виде дроби
б)	Арифметический корень из a	Число	Неотрицательное. Квадрат его равен a
в)	Параллельные прямые	Пара прямых	1) Лежат в одной плоскости. 2) Не пересекаются
г)	Симметричные точки относительно точки O	Пара точек	1) Лежат на одной прямой с O. 2) Находятся на одинаковом расстоянии от O

3.5. Замкнутая кривая, описанная концом отрезка, который вращается на плоскости вокруг своего другого неподвижного конца, называется окружностью.

3.6. Индуктивное определение: каждый член последовательности Фибоначчи, начиная с третьего, равен сумме двух предшествующих членов. Первые два члена последовательности задаются особо.

3.7. Две прямые называются перпендикулярными, если при их пересечении образуются прямые углы.

3.9. Если для всякого n верно, что $a_{n+1}>a_n$, то последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется возрастающей.

3.10. Да.

3.11. а) Прямоугольник или ромб; б) произведение; в) пара углов; г) натуральные числа; д) отрезок.

3.12. Фигура, многоугольник, четырехугольник, параллелограмм.

3.13. Не нужно и нельзя.

4.1.

Названия понятия	Родовое понятие	Видовые признаки
а) Прямоугольный треугольник	Треугольник	Один из углов прямой
б) Корень уравнения	Число	Обращает уравнение в истинное равенство
в) Окружность, описанная около треугольника	Окружность	Проходит через все вершины треугольника
г) Средняя линия треугольника	Отрезок	Соединяет середины двух сторон треугольника
д) Неполное квадратное уравнение	Квадратное уравнение	Коэффициент среднего члена или свободный член равен нулю

4.2. а) Обычно биссектрисой треугольника называют не прямую, а отрезок, делящий угол треугольника пополам от вершины до точки противоположной стороны. б) Пропущен признак: лежат в одной плоскости. в) Правильное. г) и д) Тавтология. е) Лишний признак: равные. ж) Достаточно указать, что две смежные стороны равны. з) Правильное.

4.3. Крестом называется фигура, состоящая из двух пересекающихся пополам отрезков.

4.4. Осреднением двух дробей называется дробь, числитель которой равен сумме числителей данных дробей, а знаменатель — сумме знаменателей.

5.1. а) Дано: 1) Длина окружности радиуса R_1 равна C_1; 2) длина окружности радиуса R_2 равна C_2. Доказать: $\frac{C_1}{R_1}=\frac{C_2}{R_2}$;
б) Дано: a и b — члены двучлена. Доказать: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;
в) Дано: $ab=0$. Доказать: $a=0$ или $b=0$.
г) Дано: $a>0$, $b>0$. Доказать: $\log_n ab=\log_n a+\log_n b$;
д) Дано: AB и CD — диагонали ромба. Доказать: $AB\perp CD$.

5.2. а) Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный. Верная теорема.

б) Частное от деления одинаковых степеней двух чисел равно той же степени частного этих чисел. Верная теорема.

в) Если натуральное число делится на 10, то его запись оканчивается нулем. Верная теорема.

г) Если в треугольнике два угла острые, то третий угол тупой или прямой. Неверная теорема.

5.3. а) Для того чтобы диагонали четырехугольника делились в точке пересечения пополам, необходимо и достаточно, чтобы четырехугольник был параллелограммом.

б) Для того чтобы один из корней квадратного уравнения был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы свободный член уравнения был равен нулю.

в) Для того чтобы сумма двух чисел была равна нулю, необходимо и достаточно, чтобы они были противоположными числами.

г) Для того чтобы проекции двух наклонных, проведенных из одной точки в одной прямой, были равны, необходимо и достаточно, чтобы эти наклонные были равны.

5.4. а), б), г) — достаточно.

5.5. а) A необходимо для B, B достаточно для A; б) необходимо для B, B достаточно для A; в) A достаточно для B, B необходимо для A.

6.1

№ шагов	Посылки	Условия	Следствия
а) 1.	Определение равнобедренного треугольника	$\triangle ABC$ — равнобедренный	$AC=BC$ (1)
2.	Теорема о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника	$\triangle ABC$ — равнобедренный	$\angle A=\angle B$ (2)
3.	Определение медианы треугольника	CD — медиана $\triangle ABC$	$AD=BD$ (3)
4.	Первый признак равенства треугольников	(1), (2), (3)	$\triangle ACD=$ $=\triangle BCD$ (4)
5.	Определение равенства треугольников	(4)	$\angle ADC=$ $=\angle BDC$ (5)
6.	Определение смежных углов	$\angle ADC$ и $\angle BDC$	Эти углы смежные (6)
7.	Определение прямого угла	(5) и (6)	$\angle ADC=$ $=\angle BDC=90°$ (7)
8.	Определение высоты треугольника	(7)	CD — высота
б) 1.	Определение степени	$(a+b)^2$	$(a+b)(a+b)$ (1)
2.	Правило умножения многочленов	(1)	$aa+ab+ba+bb$ (2)
3.	Определение степени	(2)	$a^2+ab+ba+b^2$ (3)
4.	Переместительный закон умножения	(3)	$a^2+ab+ab+b^2$ (4)
5.	Правило приведения подобных членов	(4)	$a^2+2ab+b^2$ (5)
в) 1.	Определение средней линии треугольника	E и F — середины сторон AB и BC	EF — средняя линия $\triangle ABC$ (1)
2.	То же	G и H — середины сторон CD и DA	GH — средняя линия $\triangle CDA$ (2)
3.	Свойство средней линии треугольника	(1)	$EF \parallel AC$ (3) $EF=\frac{1}{2}AC$ (4)
4.	То же	(2)	$GH \parallel AC$ (5) $GH=\frac{1}{2}AC$ (6)
5.	Теорема о двух прямых, параллельных третьей	(3) и (5)	$EF \parallel GH$ (7)
6.	Аксиома о равенстве двух величин, равных третьей	(4) и (6)	$EF=GH$ (8)
7.	Признак параллелограмма	(7) и (8)	$EFGH$ — параллелограмм

6.2. Ошибка в чертеже: биссектриса BM и серединный перпендикуляр DM пересекаются вне треугольника.

6.3. Воспользуйтесь второй эвристикой.

6.4. Ошибка в ссылке на теорему Пифагора. Надо было сослаться на теорему, обратную теореме Пифагора.

6.5. Пусть $\angle A > \angle B$ (1).

Тр. доказать, что в $\triangle ABC$: $BC > AC$. Допустим, что $BC = AC$. Тогда по теореме об углах при основании равнобедренного треугольника $\angle A = \angle B$, что противоречит условию (1). Допустим теперь, что $BC < AC$. Тогда отложим на AC отрезок $CD = BC$. По допущению точка D должна находиться между точками A и C, поэтому $\sphericalangle CBD < \sphericalangle B$ (2). В то же время $\angle CBD$, как внешний для $\triangle ABD$, должен быть больше внутреннего, с ним несмежного. Значит, $\sphericalangle A < \sphericalangle CBD$. Сравнивая с (2), получаем, что $\sphericalangle A < \sphericalangle B$, что противоречит (1). Следовательно, оба наши допущения неверны, тогда остается, что единственно верным соотношением между сторонами BC и AC является то, что нам и требовалось доказать, а именно что $BC > AC$.

6.6. Ошибка состоит в неправильном использовании второго признака равенства треугольников. В нем сказано, что треугольники равны, если сторона и два *прилежащих* к ней угла... Между тем в $\triangle ABM$ угол ABM не является прилежащим к стороне AM.

6.7. Ошибка в том, что для частного чисел не имеет место распределительный закон, и выносить общий множитель из делимого и делителя за скобки нельзя. Поэтому $4:4 \neq 4\ (1:1)$ и $5:5 \neq 5\ (1:1)$.

6.8. По условию (1) $b - a < 0$, поэтому, умножая обе части (1) на $b - a$, надо было изменить знак неравенства на противоположный.

6.9. Это определение, его доказывать не нужно.

7.1. Потому что четность не является общим свойством рациональных чисел, оно присуще лишь целым числам.

7.2. а) Верно; б) неверно, ибо функции могут быть и невозрастающими и неубывающими, например $y = x^2$ при $x < 0$ убывающая, а при $x > 0$ — возрастающая; в) верно; г) неверно, ибо квадрат есть частный случай ромба, а ромбы, не являющиеся квадратами, не являются и прямоугольниками.

7.3. Геометрические фигуры делятся на замкнутые (треугольник, окружность и т. д.) и незамкнутые (угол, прямая и т. д.).

7.4. Одна классификация рациональных чисел: отрицательные, нуль и положительные. Другая классификация: целые и дробные, целые в свою очередь делятся на натуральные, нуль и отрицательные целые; дробные делятся на положительные и отрицательные.

7.5. а) Четырехугольники делятся на выпуклые и невыпуклые. Выпуклые делятся на четырехугольники с непараллельными сторонами, трапеции и параллелограммы и т. д.

б) Два угла можно классифицировать по равенству, по наличию общей вершины, те в свою очередь — на вертикальные, смежные и на не вертикальные и не смежные.

7.6. а) Окружности, касающиеся всех сторон треугольников или их продолжений, окружности, проходящие через все вершины треугольника (описанная), и окружности, пересекающие стороны треугольника или их продолжение. Первые в свою очередь делятся на вписанные и на вневписанные (касающиеся одной стороны треугольника и продолжений двух других сторон).

б) Углы с вершиной в центре окружности — центральные; углы с вершиной внутри окружности, но не в центре; углы, вершина которых лежит на окружности, вписанные; углы с вершиной вне круга: 1) углы, одна сторона которых является касательной к окружности, а другая — секущей; 2) углы, обе стороны которых являются касательными к окружности; 3) углы, обе стороны которых секущие; 4) углы, одна или обе стороны которых находятся вне окружности.

в) Окружности, находящиеся одна вне другой; внешним образом касающиеся; пересекающиеся; внутренним образом касающиеся; одна внутри другой: 1) центры разные; 2) общий центр — концентрические.

г) Прямая вне окружности; касательная к окружности; секущая.

д) Квадратные уравнения: полные ($a \neq 1$); приведенные ($a = 1$); неполные: без свободного члена; без среднего члена; без свободного и среднего членов.

е) Имеющие одно решение; имеющие бесконечное множество решений; не имеющие решений.

8.1. Условия: а) 1) Путешественник проехал автобусом и по железной дороге 600 км. Два объекта: путь автобусом и путь по железной дороге; отношение — их сумма равна 600. 2) Автобусом он проехал в 4 раза меньше, чем по железной дороге. Два тех же объекта. Отношение — частное равно 4. 3) Скорость автобуса 30 км/ч. Один объект — скорость, характеристика — 30 км/ч. 4) Скорость по железной дороге 32 км/ч. Один объект — скорость, характеристика — 32 км/ч.

б) 1) $ABCD$ — трапеция. Один объект, характеристика качественная; 2) Боковая сторона трапеции равна 15 см. Один объект, характеристика — 15 см; 3) Угол при большем основании 60°. Один объект, характеристика — 60°; 4) $ABCD$ описана около круга. Два объекта — трапеция и круг; отношение: первый объект описан около второго.

8.2. а) Условия: 1) $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AC=BC$); 2) $AD\perp BC$, 3) $BE\perp AC$; 4) $CF\perp AB$. Требования: установить, какое из трех неравенств может быть истинным: 1) $AD>AB$; 2) $BE>AB$; 3) $CF>AB$.

б) Условия: 1) $A=(x^4-3x^2+1):(x^2-x-1)$.

2) $B=(x-10)(x+11)$.

Требование. Найти $A-B$.

8.3. 1-й шаг — раскрыть скобки, 2-й шаг — умножить обе части неравенства на общий знаменатель, 3-й шаг — перенести все члены с x в левую часть неравенства, а остальные — в правую часть, 4-й шаг — сделать приведение подобных членов, 5-й шаг — разделить обе части неравенства на коэффициент при x.

8.4. а) Надо использовать эвристику о разбиении сложной задачи на более простые задачи. Разбиваем задачу на три следующие: 1) найти расстояние от середины стороны AB до MN (это средняя линия $\triangle ABN$, где $BN=10$ см); 2) найти расстояние от середины стороны AC до MN (средняя линия $\triangle ACM$, где $CM=8$ см); 3) найти расстояние от середины BC до MN (средняя линия трапеции, основания которой равны 10 см и 8 см).

б) Введем вспомогательные элементы: проводим из точки D середины AB $DE\perp AC$ и $DF\perp BC$, откладываем $DE=\frac{1}{2}h_b$, $DF=\frac{1}{2}h_a$. Тогда можно построить вспомогательные прямоугольные треугольники CDE и CDF, где CD — заданная медиана. Затем продолжаем CD и откладываем $DK=CD$. Через точку K проводим $KA\parallel CF$ и $KB\parallel CE$ до пересечения с продолжениями CF и CE в точках A и B. $\triangle ABC$ — искомый.

в) Искомая сумма равна сумме площадей треугольников ACB и DEF. Площадь каждого из них равна $\frac{1}{2}ab$, следовательно, искомая сумма равна ab. Использована эвристика о замене данной задачи другой, ей равносильной.

г) Используем эвристику о разбиении области задачи на части. Рассматриваем решение уравнения в следующих промежутках:

1) $x<0$. Левая часть уравнения положительна, поэтому в этом промежутке нет решений.

2) $0\leqslant x<1$. Преобразуем уравнение: $x^{12}+x^8(1-x)+(1-x^5)=0$. Все слагаемые левой части положительны, поэтому нет решений.

3) $x\geqslant 1$. Преобразуем выражение так: $x^9(x^3-1)+x^5(x^3-1)+1=0$.

Ответ: уравнение не имеет решений.

д) Составляем уравнение: $\dfrac{x}{12\frac{4}{5}}=\dfrac{x}{10\frac{2}{3}}-10.$

е) Заменяем данную задачу геометрической: хорды KP и LQ окружности пересекаются в точке X. Известно, что $\dfrac{KX}{V_1}=\dfrac{LX}{V_2}$. Доказать, что $\dfrac{KQ}{V_1}=\dfrac{LP}{V_2}$, где V_1 и V_2— постоянные числа.

Использованы эвристики замены и введения вспомогательных элементов.

9.1. 32 треугольника, 6 квадратов, 4 трапеции, 8 параллелограммов.

9.2. Число 16 имеет пять делителей: 1, 2, 4, 8, 16; является квадратом числа 4 и четвертой степенью числа 2; равно сумме четырех нечетных чисел: $16=1+3+5+7$.

9.3. Кроме очевидных, еще такое свойство: все точки BD равноудалены от сторон AB и BC

9.4. 10.

9.5. Обращается в нуль при $x=1$ и $x=-1$; при $-1<x<1$, $y<0$, а при $x<-1$ и $x>1$, $y>0$; при $x<0$ убывает, а при $x>0$ возрастает, при $x=0$ принимает наименьшее значение -1.

9.6. Сумма двух взаимно обратных чисел, которая при $a>0$ не меньше 2, а при $a<0$ не больше -2, при $a=1$ равна 2, а при $a=-1$ равна -2.

9.7. Четное число, имеет $2(n+1)$ делителей, является общим членом геометрической прогрессии, первый член которой равен 6, а знаменатель равен 3.

9.8. До пункта A ученик шел с обычной скоростью 5 км/ч. Там он отдыхал 1/2 ч, а затем бежал от A до B со скоростью 12,5 км/ч. В пункте B отдыхал 2 ч. Из B в C он шел очень медленно со скоростью 2,5 км/ч. Прибыв в C, он через полчаса вспомнил, что забыл в B какую-то вещь, быстро побежал в B со скоростью 10 км/ч и сразу же вернулся в C в 17 ч.

9.9 Возможны три различных случая расположения этих точек: 1) две точки лежат на диаметре, а третья — на одной из полуокружностей; 2) все три точки лежат на одной полуокружности; 3) две точки лежат на одной полуокружности, а третья — на другой. В первом случае образуется 3 треугольника, во втором — 8, а в третьем — 4. Кроме того, образуются секторы и сегменты круга, а во втором случае еще и четырехугольник.

10.1. а) Сходны по свойствам: пара углов; имеют общую вершину; различия: вертикальные углы всегда равны, а смежные, как правило, не равны; сумма смежных углов постоянна, а сумма вертикальных переменная. б) Сходны по свойствам: замкнутые фигуры, имеют центр симметрии. Различия: круг ограничен кривой линией, а квадрат состоит из прямолинейных отрезков; круг имеет бесконечное множество осей симметрии, а квадрат только 4 оси симметрии. в) Не сравнимы. г) Сходны по свойствам; алгебраические выражения; двучлены; суммы степеней. Различия: степени разные. д) Сходны: дроби. Различия: первое есть число, а второе — алгебраическое выражение. е) Сходны: представляют собой задачи на отыскание искомых; левые части одинаковы. Различия: первое уравнение, а второе неравенство; первое имеет лишь два корня, а второе — бесконечное множество. ж) Не сравнимы.

10.2. а), б) и г) — неверно; разные основания сравнения. в) верно, д) неверно, ибо это несравнимые объекты.

10.3. Не больше 6.

10.4. а)154,173; б) 12,19; в) 3,1; г) 125,216; д) 3; 2,5.

11.2. а) 4 мин; б) 14 м; в) 7 мин; г) 5.

11.3. а) 4; б) 2; в) 5; г) 3.

11.4. Это значит, что она обратилась к девочке.

11.5. а) 10 км; б) обе одинаково; в) в понедельник.

12.1. Потому что сразу после уроков все еще свежо в памяти и ничего не забыто, а через день-два многое забудется и труднее будет восстановить забытое.

12.2. Шпаргалки вредны тем, что используются при непонимании учебного материала. Когда материал понят, усвоен, шпаргалки не нужны. Шпаргалки дают возможность лишь механически воспроизвести непонятное и неусвоенное содержание, которое после ответа тут же исчезает из памяти, и, следовательно, при необходимости еще раз где-то использовать это содержание понадобится снова шпаргалка. Шпаргалка может «выручить» лишь для получения положительной оценки у очень невнимательного учителя. Стоит же пользующемуся шпаргалкой задать какой-то дополнительный вопрос, как сразу обнаруживается непонимание и незнание.

12.3. Да, играет, ибо хорошо и прочно запоминается лишь при установке на длительное запоминание.

12.4. Лучше всего попытаться вывести забытую формулу, тождество.

12.5. Надо запомнить метод (прием) доказательства теоремы. Дословно запоминать доказательство не следует.

13.1. 87; 101; 100; 243; 551; 393; 248; 990; 134; 186; 323; 864; 11 214.

13.2. 57; 74; 287; 166; 21; 786; 108; 756; 97; 824; 243.

13.3. 38,5; $5\frac{13}{15}$; $7\frac{7}{12}$; 9,4; 17,7; 12; 215; 414; 60; 192. **13.4.** $M=160$; $K=11{,}8$.

13.5. 0,25; 1,5; 2,75; 4; 5,25; 7,75; 12,75; 37,75; 51,5.

13.6. -100; 1,5; $-26{,}4$; -69; 4; -20.

13.7. а) $\frac{1}{32}a^2b$; б) $3y^2$; в) $\frac{b^3}{6}-\frac{b^2}{8}$; г) a^2+b^2; д) $-1{,}16\,(a^2-x^2)$.

13.8. а) $x=8$; б) $x=0{,}5$; в) $x=-12$; г) $x>5$; д) $3<x<5$.

14.1. а) CA_1, CB_1, CD_1, CA. б) AB_1, BA_1, BC_1, CB_1, CD_1, DC_1, DA_1, AD_1. в) BD, A_1C, BC_1, DA_1.

14.2. а) 4 хода:

2	4	3			2	3			2	3		1	2	3
1		5		1	4	5		1	4	5			4	5

б) 8 ходов:

4	1	3			4	3			4	3		2	4	3
2		5		2	1	5		2	1	5			1	5

2	4	3		2		3			2	3		1	2	3
1		5		1	4	5		1	4	5			4	5

в) 10 ходов:

4	3	5		4	3	5		4	3			4		3			4	3
2		1		2	1			2	1	5		2	1	5		2	1	5

2	4	3		2	4	3		2		3			2	3		1	2	3
	1	5		1		5		1	4	5		1	4	5			4	5

14.3. а) 6 ходов, например: $c2$, $d4$, $f5$, $h6$, $f7$, $h8$.
б) 1) $b1-a3$; $b4-a2$; 2) $a3-c2$; $a2-c3$;
3) $c2-b4$; $c3-b1$;
в) 5 ходов: $b3$, $c5$, $a6$, $c7$, $a8$.
г) Бить пешку нельзя, 4 хода: $d4$, $c5$, $f8$, $g7$.
д) 3 хода: $d2$, $a5$, $c7$. е) 5 ходов: $f5$, $h3$, $f1$, $b5$, $c6$.

15.1. Если множитель меньше 1, то произведение меньше множимого, а если множитель больше 1, то произведение больше множимого.

15.2. а) Произведение взаимно-обратных чисел равно единице.

б) При возвышении отрицательного числа в четную степень получается положительное число, а в нечетную — отрицательное число.

15.3. 3^{423} оканчивается на 7.

15.4. Для того чтобы узнать, делится ли число на 99, разбиваем его на грани справа налево, по две цифры в каждой грани (в последней грани может быть одна цифра), складываем полученные грани. Если эта сумма делится на 99, то и данное число делится на 99. Пример: $N=2\,725\,668$. Находим сумму: $68+56+72+2=198$, эта сумма делится на 99, значит, и N делится на 99.

15.5. а) n^2; б) $\frac{n}{n+1}$; в) $\frac{2n-1}{n^2}$; г) $0{,}1^n$; д) $3+4\,(n-1)$; е) $4\cdot(-3)^{n-1}$.

15.6. а) x^2+y^2+2xy; б) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

15.7. *Через любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну.*

15.8. Это уравнение означает точку (2; 3) или, что то же, окружность центра (2; 3) нулевого радиуса.

15.9. а) (0; -1); (-1; 0); б) (0; 2); (1; 2); в) (-2; 0); (-2; 1).

15.10. Диагональ ромба делит его на два равных равнобедренных треугольника. Если равнобедренный треугольник повернуть вокруг основания, как оси вращения, до совпадения с плоскостью, то получится ромб. Следствиями свойств равнобедренного треугольника являются такие свойства ромба: диагонали ромба взаимно перпендикулярны; диагонали ромба делят углы его пополам; противоположные углы ромба равны.

15.11. а) Один комбайнер может убрать поле за 3 ч, а другой за 2 ч. За сколько времени они уберут это поле, если будут работать на нем совместно? б) Расстояние между станциями A и B товарный поезд проходит за 3 ч, а пассажирский — за 2 ч. Из A в B вышел товарный поезд, а одновременно из B в A вышел пассажирский поезд. Через сколько времени они встретятся?

15.12. При решении уравнений. Если некоторое уравнение можно представить в виде $f(x)\varphi(x)=0$, то оно равносильно совокупности двух уравнений: $f(x)=0$ и $\varphi(x)=0$.

15.13. Диагональ прямоугольника делит его на два равных прямоугольных треугольника. Так как диагонали прямоугольника равны и при пересечении делятся пополам, то отсюда следует, что медиана прямоугольного треугольника, проведенного к гипотенузе, равна ее половине. Следствием теоремы Пифагора является: сумма квадратов диагоналей прямоугольника равна сумме всех его сторон. **16.1.** 5 углов.

16.2. Надо каждый из трех батонов разделить пополам, получим 6 половинок, и дать каждому по одной половинке батона. Затем каждый из оставшихся двух батонов разделить на 3 равные части, получим всего 6 третьих частей батона, и дать каждому по одной трети батона...

16.3. В 6 ч утра во вторник гусеница будет на высоте 6 м. Каждый час днем она подымается на $\frac{5}{12}$ м, следовательно, оставшиеся 3 м до вершины она проползет за $3:\frac{5}{12}=7\frac{1}{5}$ ч. Значит, гусеница достигнет вершины во вторник в 13 ч 12 мин.

16.4. $97\,072+7843=104915$ или $97\,073+7842=104\,915$.

16.5. Обозначим число дня рождения буквой x, номер месяца — y, а число из двух последних цифр года рождения z. Тогда если вы проделаете все вычисления, то получите число: $10\,000x+100y+z+90\,725$.

Поэтому ведущий из названного результата устно отнял 90 725 и в полученной разности первые две цифры обозначают число дня рождения, следующие две — номер месяца, а последние две — последние две цифры года рождения. В приведенном примере имеем $271\,194-90\,725=18\,04\,69$, что и означает 18 апреля (4-го месяца) 1969 г.

16.6. Надо отметить вершины и на сторонах еще по 2 точки.

16.7. Обозначим число бригад по сбору металлолома через x, а число учащихся в каждой бригаде — через y. Тогда получим уравнение: $xy+4x=39$ или $(y+4)x=39$. Так как $39=3\cdot 13$, то очевидно, что $x=3$, $y=9$. Следовательно, в каждой бригаде по сбору металлолома было по 9 школьников, а по сбору макулатуры по 3 школьника.

16.8. 50 кг. **16.9.** 73. **16.10.** В комнате находятся внук, его отец и дед — отец отца. **16.11.** $|x-2|+|x-5|=3$. **16.12.** Трапеция; параллелограмм.

16.13. Может: они пользовались разными мерками, притом мерка Коли в 12 раз больше мерки Саши. **16.14.** Может, если высота будет равна 1 км.

16.15. Докажите методом от противного.

16.16. Допустим, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ (1) имеет три различных корня x_1, x_2 и x_3. Тогда справедливы следующие равенства: $ax_1^2+bx_1+c=0$; $ax_2^2+bx_2+c=0$; $ax_3^2+bx_3+c=0$. Вычтем почленно из первого равенства второе, а затем третье. Получим после преобразований: $(x_1-x_2)(ax_1+ax_2+b)=0$,

$(x_1-x_3)(ax_1+ax_3+b)=0$. Так как по предложению $x_1-x_2\neq 0$ и $x_1-x_3\neq 0$, то получим такие равенства: $ax_1+ax_2+b=0$, $ax_1+ax_3+b=0$.

Вычтем почленно из первого второе, получим: $a(x_2-x_3)=0$. Но $a\neq 0$, следовательно, $x_2-x_3=0$ или $x_2=x_3$, что противоречит предположению. Значит, оно неверно, и поэтому (1) не может иметь трех различных корней.

16.17. Так как ромб и окружность имеют центр симметрии, то при описании окружности около ромба их центры должны совпасть. Следовательно, диагонали ромба должны служить диаметрами окружности, и поэтому они должны быть равны. Но диагонали ромба, один из углов которого равен 30°, не равны. Следовательно, около такого ромба описать окружность нельзя. Обобщая, получаем такую теорему: «Если ромб не является квадратом, то около него нельзя описать окружность».

16.18. Легко доказать, что хорды, соединяющие концы двух параллельных хорд окружности, равны. Поэтому если около трапеции описана окружность, то боковые стороны трапеции равны. Следовательно, около неравнобочной трапеции описать окружность нельзя. Вписать же окружность можно, если сумма длин оснований равна сумме длин боковых сторон.

16.19. Например: $2x^2+3x+5<0$ или $-2x^2+3x-5>0$.

16.20. Длины всех окружностей увеличатся на одну и ту же величину 2π м.

16.21. Пусть общая сторона этих двух прямоугольных треугольников равна h, а их гипотенузы b и c. Вторые катеты в таком случае являются проекциями b и c на сторону a. Обозначим их b_1 и c_1. Тогда имеем: $b^2=h^2+b_1^2$, $c^2=h^2+c_1^2$. Отсюда $b^2-c^2=b_1^2-c_1^2$ или $(b-c)(b+c)=(b_1-c_1)\cdot(b_1+c_1)$, но $b_1+c_1=a$, поэтому $(b+c):a=(b_1-c_1):(b-c)$.

16.22. Минутная стрелка прошла от начала часа угол, равный $\frac{360°\cdot 24}{60}=144°$, а часовая стрелка от начала дня угол $\frac{360°}{12}\cdot 3\frac{24}{60}=102°$. Следовательно, они образуют между собой угол в 42°.

КРАТКИЙ СЛОВАРЬ

Абстракция — результат мысленного отвлечения (абстрагирования) тех или иных определенных свойств от множества свойств рассматриваемого объекта.

Аксиома — предложение, принимаемое без доказательства, являющееся исходным для доказательства других предложений и для косвенного определения первичных понятий.

Алгоритм — точное предписание (правило) о выполнении в определенном порядке указанных операций (шагов алгоритма), позволяющее решать все задачи определенного вида.

Арифметика — наука о числах и операциях над ними. В начальном курсе математики (I—V классы) изучаются основы арифметики.

Вид — каждый класс объектов, который входит в объем более широкого класса объектов.

Видовое понятие — понятие, входящее в состав более общего понятия, которое называется родовым.

Видовой признак — свойство, отличающее объекты одного вида от объектов других видов, входящих в один и тот же род.

Генетическое определение — определение, в котором указывается способ создания (построения) объектов определенного понятия.

Доказательство — установление (обоснование) истинности высказывания (суждения, предложения); логическое действие, в процессе которого истинность данного высказывания обосновывается с помощью других высказываний. Математическое доказательство — цепочка правильных умозаключений, идущих от аксиом или ранее доказанных теорем к доказываемой теореме.

Идеальный (абстрактный) объект — не существующий реально, но отображающий определенные свойства (например, форму) некоторых реальных объектов и служащий для научного изучения этих реальных объектов.

Индуктивное определение — такое определение понятия, которое позволяет из некоторых исходных объектов путем применения к ним определенных операций строить другие объекты этого понятия.

Классификация — распределение объектов некоторого рода на виды; деление объема понятия на виды.

Количество — совокупность свойств, указывающих на величину предмета, его размер.

Логическое мышление — правильное, совершаемое по законам логики.

Математический аппарат — совокупность предложений (теорем, формул и т. д.) математики, дающих возможность строить математические модели в различных науках и решать задачи.

Математический метод — метод (общий способ, путь) математического изучения закономерностей природы и общества. В частности, совокупность правил и приемов построения математических моделей реальных явлений и процессов.

Математический язык — система математических знаков и символов, операции с которыми совершаются по особым правилам, устанавливаемым в математике.

Метод — путь, способ исследования или изучения объектов (явлений), общий способ решения каких-либо задач.

Модель — объект, подобный другому объекту (оригиналу), служащий для изучения (исследования) оригинала. Например, чертеж детали машины есть модель этой детали.

Объект — то, что является предметом рассмотрения, изучения, воздействия.

Объем понятия — совокупность (множество) объектов, входящих в данное понятие.

Определение понятия — логическая операция, в процессе которой раскрывается содержание понятия.

Переменная величина — величина, которая принимает различные значения.

Понятие — целостная совокупность суждений об отличительных свойствах объектов некоторого класса.

Предложение — суждение, выражающее общее свойство некоторого понятия.

Признак — свойство объектов понятия, по которому их отличают от объектов других понятий.

Род — класс объектов, в состав (объем) которого входят другие классы объектов, являющиеся видами этого рода.

Свойство — то, что присуще объектам, что их отличает от других объектов или делает их похожими на другие объекты. Свойство является существенным для определения понятия, если оно присуще всем объектам этого понятия (является общим свойством) и без него объекты этого понятия не существуют. Свойство объекта (предмета) является существенным для решения задачи, если это свойство используется в процессе решения. Несущественные свойства для определения понятия (не общие, случайные) могут быть существенными для решения конкретной задачи.

Следствие — суждение, получающееся в результате умозаключения из одного или нескольких суждений.

Содержание понятия — совокупность свойств, присущих всем объектам данного понятия.

Софизм — умышленно ошибочное рассуждение, которое выдается за истинное.

Суждение — форма мысли, в которой утверждается или отрицается что-либо относительно объектов (предметов, явлений). Суждения могут быть истинными или ложными.

Теорема — доказываемое предложение.

Умозаключение — логическое действие, в результате которого из одного или нескольких известных суждений получают новое суждение, содержащее новое знание.

Эвристика — 1. Наука, изучающая закономерности поиска решения задач. 2. Прием (правило) поиска решения задач.

ДОРОГИЕ РЕБЯТА!

Я очень рад, что у вас хватило терпения и настойчивости прочитать и проработать всю книгу. Прошу вас, напишите:

а) Легко ли было читать эту книгу, какие места книги вам показались трудными, непонятными?

б) Выполнили ли вы все задания? Какие задания оказались для вас легкими, а какие — трудными?

в) Принесло ли пользу вам выполнение заданий? какую? или никакой пользы от выполнения заданий вы не почувствовали?

г) Принесло ли вам пользу чтение этой книги? какую?

д) Какие ваши пожелания по улучшению книги?

Буду благодарен за ответы на эти вопросы.

Пишите по адресу: 119517, Москва, Нежинская, 19, корп. 2, кв. 106. Фридману Льву Моисеевичу.

ЛЕВ МОИСЕЕВИЧ ФРИДМАН

УЧИТЕСЬ УЧИТЬСЯ МАТЕМАТИКЕ

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб*
Редактор *Э. К. Викулина*
Младший редактор *Л. И. Заседателева*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *Л. М. Абрамова*
Корректор *Н. В. Бурдина*

ИБ № 8773

Сдано в набор 03.01.85. Подписано к печати 13.05.85. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. кн.-журн. отеч. Гарнит. литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 7. Усл. кр.-отт. 7,25. Уч.-изд. л. 8. Тираж 381 000 экз. Заказ № 20. Цена 25 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

25 к.